

# EFFIZIENZ UND DUALITÄT IN DER AKTIVITÄTSANALYSE

## **Inaugural - Dissertation**

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften  
bei der  
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Freien Universität Berlin

vorgelegt von  
Diplom - Volkswirt Karl Peter Schönfeld  
aus  
Berlin

Berlin 1964

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT  
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

# EFFIZIENZ UND DUALITÄT IN DER AKTIVITÄTSANALYSE

## **Inaugural - Dissertation**

zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften  
bei der  
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Freien Universität Berlin

vorgelegt von  
Diplom-Volkswirt Karl Peter Schönfeld  
aus  
Berlin

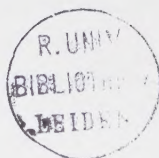
Berlin 1964

Dekan: Professor Dr. Klaus v. Wysocki

Referent: Professor Dr. Hans Münzner

Korreferent: Professor Dr. Alfred Stobbe

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Mai 1964



## Inhaltsverzeichnis

|     |                                                                                                                        |       |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 0.  | <u>Einleitung</u>                                                                                                      | S. 5  |
| 0.1 | Gegenstand der Untersuchung                                                                                            | S. 5  |
| 0.2 | Bemerkungen zur symbolischen Schreibweise                                                                              | S. 7  |
| 1.  | <u>Effiziente Produktion und Schattenpreise<br/>im linearen Produktionsmodell ohne Güter-<br/>restriktionen</u>        | S. 11 |
| 1.1 | Das endliche lineare Produktionsmodell                                                                                 | S. 11 |
| 1.2 | Herleitung einiger mathematischer Hilfsmittel                                                                          | S. 15 |
| 1.3 | Effiziente Produktion und duale Preissysteme                                                                           | S. 19 |
| 1.4 | Eindeutigkeitssätze über Preissysteme bei<br>effizienter Produktion                                                    | S. 26 |
| 1.5 | Effizienz im allgemeinen linearen Produktions-<br>modell                                                               | S. 29 |
| 2.  | <u>Optimaler Faktoreinsatz im linearen Produk-<br/>tionsmodell bei gegebener Endnachfrage</u>                          | S. 40 |
| 2.1 | Problemstellung und Definitionen                                                                                       | S. 40 |
| 2.2 | Das lineare Vektor-Maximum-Problem und<br>verwandte Extremalprobleme                                                   | S. 41 |
| 2.3 | Effizienzkriterien und Existenzsatz                                                                                    | S. 46 |
| 2.4 | Eigenschaften des linearen Produktionsmodells<br>bei einfacher Produktion                                              | S. 52 |
| 3.  | <u>Effiziente Produktion und Schattenpreise<br/>im linearen Produktionsmodell mit beschränk-<br/>tem Faktorangebot</u> | S. 61 |
| 3.1 | Problemstellung und Definitionen                                                                                       | S. 61 |
| 3.2 | Effizienzkriterien und Existenzsatz                                                                                    | S. 62 |
| 3.3 | Duale Preissysteme und allgemeines Tausch-<br>gleichgewicht                                                            | S. 64 |
| 3.4 | Das Substitutionstheorem von Samuelson                                                                                 | S. 67 |
| 3.5 | Das allgemeine lineare Produktionsmodell<br>mit Faktorbeschränkungen                                                   | S. 74 |

|     |                                                                                                                  |        |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 4.  | <u>Die numerische Bestimmung der Menge der effizienten Punkte im linearen Produktionsmodell</u>                  | S. 79  |
| 4.1 | Theorie der Spiralmethode von Charnes / Cooper                                                                   | S. 79  |
| 4.2 | Beispiel für die Anwendung der Spiralmethode                                                                     | S. 92  |
| 5.  | <u>Vektor-Maxima und Dualität in der nichtlinearen (konkaven) Programmierung</u>                                 | S. 99  |
| 5.1 | Das nichtlineare Vektor-Maximum-Problem und zugehörige Extremalprobleme                                          | S. 99  |
| 5.2 | Das Sattelwerttheorem von Kuhn / Tucker                                                                          | S. 105 |
| 5.3 | Dualität in der nichtlinearen Programmierung                                                                     | S. 113 |
| 6.  | <u>Effizienz und Dualität im endlichen nichtlinearen Produktionsmodell</u>                                       | S. 126 |
| 6.1 | Das endliche nichtlineare Produktionsmodell                                                                      | S. 126 |
| 6.2 | Effizienzkriterien und Existenzsatz                                                                              | S. 132 |
| 6.3 | Monopolistische und technologische "Ausbeutung" der Produktionsfaktoren unter dem Prinzip der Grenzproduktivität | S. 139 |
| 6.4 | Dezentralisation der Entscheidungen bei optimalem Faktoreinsatz                                                  | S. 147 |
| 7.  | <u>Pareto-Optima und allgemeines Gleichgewicht im endlichen nichtlinearen Gleichgewichtsmodell</u>               | S. 153 |
| 7.1 | Effizienz im allgemeinen Gleichgewichtsmodell                                                                    | S. 153 |
| 7.2 | Pareto-Optima und Gleichgewicht bei Wettbewerb                                                                   | S. 159 |
|     | <u>Literaturverzeichnis</u>                                                                                      | S. 168 |
|     | <u>Anmerkungen</u>                                                                                               | S. 173 |
|     | <u>Lebenslauf</u>                                                                                                | S. 182 |

#### Hinweis

Die Anmerkungen, die im Text fortlaufend numeriert sind (z.B.: <sup>23/</sup>), befinden sich am Ende der Arbeit auf den S. 173 bis 181.

## Einleitung

### 0.1

### Gegenstand der Untersuchung

Den Zugang zu der in der folgenden Arbeit abgehandelten Aktivitäts- oder Prozeßanalyse eröffnet vielleicht am ehesten eine Kritik an der neoklassischen Produktionstheorie. Die neoklassische Produktionsfunktion gibt bekanntlich zu jeder Mengenkombination von Produktionsfaktoren an, welche Produktmenge sich maximal bei gegebenem Stand der Technik aus den Faktormengen herstellen läßt. Die Ermittlung dieses maximalen Ausstoßes wurde von der neoklassischen Produktionstheorie als ein außerhalb ihres Aufgabenbereichs liegendes, rein technisches Problem angesehen. Dieser Standpunkt ist indes zum mindesten dann fragwürdig, wenn - wie in der Realität die Regel - eine gegebene Faktormengenkombination mehrere Produkte gleichzeitig oder wahlweise zu erzeugen gestattet. In diesem Falle bildet die Bestimmung der verschiedenen möglichen maximalen Mengenkombinationen der Produkte einen wesentlichen Teil des ökonomischen Problems des optimalen Faktoreinsatzes.

Die Produktionstheorie in der Fassung der Aktivitätsanalyse begegnet diesem Einwand ausdrücklich, indem sie die auch anderweitig zu enge Annahme vermeidet, daß eine Produktionsfunktion im herkömmlichen Sinne existiert und im voraus bekannt ist. Sie geht statt dessen von den elementaren Produktionsprozessen oder Aktivitäten aus und stellt die Bestimmung derjenigen Prozeßkombinationen, die zu maximalem Güterausstoß und damit zu optimalem Faktoreinsatz führen, in den Mittelpunkt ihrer Betrachtung. Die mengenmäßige Maximalität des Güterausstoßes wird in der Prozeßanalyse als Effizienz bezeichnet. Zu den wichtigsten Ergebnissen der Aktivitätsanalyse gehört die Erkenntnis, daß

dem technischen Problem der Bestimmung effizienter Prozeßkombinationen stets ein duales Preis- oder Bewertungsproblem zugeordnet ist. Man spricht hierbei vom Dualitätsprinzip der Prozeßanalyse.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die systematische Anwendung dieses Prinzips zur Charakterisierung der effizienten Prozeßkombinationen in verschiedenen aktivitätsanalytisch formulierten statischen Produktionsmodellen. Im besonderen wird dabei die formal-mathematische Struktur des Konzepts der Effizienz und der Dualität analysiert. Die hierzu benötigte formale Theorie der Prozeßanalyse und ihre mathematischen Grundlagen in Gestalt einer allgemeinen Theorie der Vektormaxima werden an Hand der neueren Beiträge zur linearen und konkaven Programmierung entwickelt. Die wesentlichen Ergebnisse der Aktivitätsanalyse sowie einige in der Literatur noch nicht erwähnte Resultate werden darüber hinaus auf ihren ökonomischen Gehalt untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, daß dem Leser die Anfangsgründe der Prozeßanalyse vertraut sind.<sup>1/</sup>

Im ersten Teil der Arbeit liefert die Auswertung des Dualitätsprinzips einfach strukturierte algebraische Beweise für die Haupteigenschaften des linearen Produktionsmodells ohne Güterrestriktionen (Kapitel 1), mit gegebener autonomer Nachfrage (Kapitel 2) und mit gegebenen Faktorbeschränkungen (Kapitel 3). Die offenen Leontief-Modelle werden dabei eingehend berücksichtigt. Das Problem der numerischen Ermittlung effizienter Prozeßkombinationen in linearen Modellen wird im Kapitel 4 erörtert. Das Kapitel 6 ist der eingehenden Darstellung des allgemeinen Modells der Aktivitätsanalyse für den Fall nichtzunehmenden Ertragszuwachses gewidmet. Dabei ergibt sich eine Verallgemeinerung der bekannten Effizienztheoreme der linearen Prozeßanalyse. Die im Kapitel 5 entwickelte nichtlineare Dualitätstheorie führt zur Entdeckung des Phänomens der sog. "Faktorausbeutung" auch in aktivitätsanalytischen Produktionsmodellen.

Schließlich wird im Kapitel 7 die Effizienz zum Begriff der Pareto-Optimalität erweitert und in einem prozeßanalytisch gefaßten Modell des allgemeinen Gleichgewichts studiert. In formaler Hinsicht enthält dieses Modell sämtliche übrigen hier behandelten Produktionsmodelle als Spezialfälle.

Die Eigenschaften der Produktionsmodelle der Prozeßanalyse zeichnen sich durch weitgehende Unabhängigkeit von der substantiellen Deutung des institutionellen Rahmens der Produktion aus. So kann es sich bei der Produktionseinheit um eine Betriebsabteilung, eine Unternehmung, eine Industrie oder um eine ganze Volkswirtschaft handeln. Die Produktion kann marktwirtschaftlich organisiert, aber auch zentralgeplant sein. Um diese institutionelle Neutralität anzudeuten, sagen wir gewöhnlich, die Produktion vollziehe sich in einer abstrakten Wirtschaft. Es sei betont, daß die folgende Darstellung auf die statische Theorie der Aktivitätsanalyse beschränkt ist.

In methodischer Hinsicht gestattet die prozeßanalytische Formulierung der modernen Produktionstheorie die Verwendung des dem Ökonomen gegenüber den abstrakten mengentheoretisch-topologischen Verfahren der neueren Katallaktik noch vertrauteren Instrumentariums der Marginalanalyse.

## 0.2 Bemerkungen zur symbolischen Schreibweise

0.2.1 Zur symbolischen Schreibweise in dieser Arbeit wird folgendes vereinbart.

Vektoren werden mit kleinen lateinischen oder großen griechischen Buchstaben ( $a, b, x, y, \Phi$  o.ä.), Matrizen mit großen lateinischen Buchstaben ( $A, B$  o.ä.), reelle Zahlen mit kleinen griechischen oder unten indizierten lateinischen Buchstaben ( $\alpha, \lambda, a_1, a_{ij}, x_j$  o.ä.), natürliche Zahlen mit Symbolen wie  $m, n, p, L, N, R$  o.ä. und Punkt Mengen mit großen Buchstaben ( $D, H, \Gamma, \Omega$  o.ä.) bezeichnet. Vektoren und Matrizen können auch durch Superskripte unterschieden werden (z.B.

$x^1, x^2, \dots, x^p, A^{(1)}, A^{(2)}$  ) oder durch die beiden Subskripte F und P, die sich auf die Einteilung der Güter in finale und primäre Güter beziehen (z.B.  $y_F, y_P$ ). Als laufende Indizes werden gewöhnlich die üblichen kleinen Buchstaben wie i, j, k,  $\lambda, \nu, q$  verwendet.

0.2.2 Ist a als Element in der Menge A enthalten (bzw. nicht enthalten), so schreiben wir  $a \in A$  (bzw.  $a \notin A$ ). Ist jedes Element einer Menge B zugleich Element einer Menge A, so heißt B eine Teil-(Unter-)Menge von A (symbolisch  $B \subseteq A$ ). Gilt  $B \subseteq A$  und zugleich  $A \subseteq B$ , so heißen A und B gleich ( $A = B$ ). Eine Menge A wird in der Form

$$(0-1) \quad A = \{ a \mid \alpha \}$$

definiert, wobei  $\alpha$  die Zugehörigkeit der Elemente a zur Menge A bestimmende Bedingung darstellt. Sind A und B zwei Mengen, so schreibt man

$$(0-2) \quad A \cup B = \{ z \mid z \in A \text{ oder } z \in B \} \quad (\text{Vereinigung}),$$

$$(0-3) \quad A \cap B = \{ z \mid z \in A \text{ und } z \in B \} \quad (\text{Durchschnitt}).$$

In dieser Arbeit werden nur Punktmengen in euklidischen Räumen E betrachtet. Ist  $A \subseteq E$ , so versteht man unter  $\bar{A}$  die Menge

$$(0-4) \quad \bar{A} = \{ z \mid z \in E, \text{ aber } z \notin A \} \quad (\text{Komplement}).$$

0.2.3 Sind  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  n-dimensionale Vektoren, d.h. Punkte des n-dimensionalen euklidischen Raumes  $E_n$ , so setzen wir

$$(0-5) \quad \begin{aligned} x &= y, \text{ sofern } x_j = y_j \text{ (Gleichheit),} \\ x &\geq y, \text{ sofern } x_j \geq y_j \text{ ("größer"),} \\ x &> y, \text{ sofern } x_j > y_j \text{ ("strikt größer")} \end{aligned}$$

für alle  $j=1, 2, \dots, n$  gilt, und ferner

(0-6)  $x \geq y$ , sofern  $x \geq y$ ,  $x \neq y$  ("halbstrikt größer").

Vektoren gehorchen den Rechengesetzen:

(0-7)  $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ ,  $\alpha$  reell (skalare Multiplikation),

(0-8)  $(-1)x = -x$ ,

(0-9)  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  (Vektoraddition),

(0-10)  $xy = \sum_j x_j y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) (inneres Produkt).

Wir setzen  $|x-y| = +\sqrt{(x-y)(x-y)}$ .

Eine Matrix der Ordnung  $m \times n$  schreiben wir

$$(0-11) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \| a_{ij} \|.$$

Es ist (skalare Multiplikation):

$$(0-12) \quad \alpha A = \| \alpha a_{ij} \|, \alpha \text{ reell.}$$

Ist  $B = \| b_{ij} \|$  eine zweite  $m \times n$ -Matrix, so ist

$$(0-13) \quad A = B, \text{ sofern } a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i, j,$$

sowie

$$(0-14) \quad A + B = \| a_{ij} + b_{ij} \|.$$

Ist  $B = \| b_{jk} \|$  eine  $n \times p$ -Matrix, so ist

$$(0-15) \quad AB = \| \sum_j a_{ij} b_{jk} \| = \| c_{ik} \| \text{ (Matrizenmultiplikation).}$$

Eine  $m \times n$ -Matrix  $A = \| a_{ij} \|$  kann mit einem  $m$ -dimensionalen Vektor  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , aber auch mit einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  multipliziert werden:

$$(0-16) \quad uA = (\sum_i a_{i1}u_i, \dots, \sum_i a_{in}u_i),$$

$$Ax = (\sum_j a_{1j}x_j, \dots, \sum_j a_{mj}x_j).$$

In dieser Arbeit werden Zeilen- und Spaltenvektoren nicht unterschieden. Dies ist möglich, weil in ihr nur innere Produkte von Vektoren (vgl. (0-10)) auftreten. Infolgedessen entfällt in der Regel die Operation  $T$  der Transposition von Vektoren und Matrizen ( $^T x$ ,  $^T A$  o.ä.).

0.2.4 Der Einheitsvektor  $e$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E_n$  ist der aus  $n$  Komponenten bestehende Vektor  $(1, 1, \dots, 1)$ , der  $j$ -te Einheitsvektor ( $j=1, 2, \dots, n$ ) ist der Vektor  $e^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , der eine 1 als  $j$ -te Komponente und sonst nur Nullen enthält. Mit  $I$  oder  $I_n$  wird die  $n \times n$ -Einheitsmatrix  $I = ||e^j||$  abgekürzt, mit  $O$  der Nullvektor bzw. die Nullmatrix entsprechende Dimension bzw. Ordnung. Unter dem nichtnegativen Orthanten  $E_n^+$  von  $E_n$  ist die Menge

$$(0-17) \quad E_n^+ = \{x \mid x \geq 0, x \in E_n\}$$

zu verstehen. Spielt die Dimension eines Vektors  $x$  keine Rolle (außer daß sie endlich ist), so wird statt  $x \in E_n$  auch  $x \in E_x$  geschrieben.

0.2.5 Ist  $h(x)$  eine (vektorwertige) differenzierbare Funktion, so wird die Matrix ihrer partiellen Ableitungen im Punkte  $x$  (Gradienten- oder Funktionalmatrix) mit  $H(x)$  symbolisiert, also

$$(0-18) \quad H(x) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{array} \right\| = \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|.$$

Im übrigen wird die übliche mathematische Schreibweise angewandt.

## Kapitel 1

### Effiziente Produktion und Schattenpreise

#### im linearen Produktionsmodell ohne Güterrestriktionen

#### 1.1 Das endliche lineare Produktionsmodell

1.1.1 Das statische Produktionsmodell der Aktivitätsanalyse beschreibt die Möglichkeiten der Produktion in einer abstrakten Wirtschaft für eine gegebene Planperiode. Unter Produktion wird im weitesten Sinne die Transformation von Mengenkombinationen vorhandener Güter in andere Gütermengenkombinationen gemäß festliegender technischer Transformationsfunktionen verstanden.

In der betrachteten Wirtschaft seien insgesamt  $m$  Güter unterschieden, und zwar  $r$  finale Güter (Endprodukte) und  $s$  primäre Güter (Produktionsfaktoren, Ressourcen),  $r + s = m$ . Die Einteilung in primäre und finale Güter ist rein konventionell und hängt von der jeweiligen substantiellen Deutung des Produktionsmodells ab. In jedem Falle sind finale Güter gemäß irgendeiner Wertskala begehrt. Ihre Erstellung ist daher das Ziel der Produktion. Zu Beginn der Planperiode ist von ihnen kein einsatzfähiger Anfangsbestand vorhanden. An primären Gütern steht dagegen gewöhnlich ein modellextern gegebener Anfangsbestand zur Verfügung. Jedoch können auch primäre Güter durch Produktion vermehrbar sein. Auf die explizite Einführung einer dritten Gruppe von Gütern, der intermediären Güter (Zwischenprodukte), wird in dieser Arbeit verzichtet, weil diese Güter in den hier zu behandelnden Modellen entweder eliminiert oder formal den primären Gütern gleichgestellt werden können; ein Hinweis, wie dies geschehen kann, findet sich z.B. in Bemerkung 3 von 6.2.1.

1.1.2 Die technologisch möglichen Produktionsergebnisse lassen sich durch (Produktions-)Prozesse (Aktivitäten) ausdrücken. Es wird unterstellt, daß die abstrakte Wirtschaft über  $n$  Transformationsfunktionen  $h^j = (f^j, g^j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , verfügt, die angeben, welche Gütermengenkombinationen (Inputs) in welche neuen Gütermengenkombinationen (Outputs) transformiert werden. Jede Transformationsfunktion besteht aus  $m$  Komponenten,  $h^j = (h_1^j, h_2^j, \dots, h_m^j) = (f_1^j, \dots, f_r^j, g_1^j, \dots, g_s^j)$ , die den  $m$  Gütern entsprechen und die ihrerseits Funktionen  $h_i^j = h_i^j(x)$  eines Vektors  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  von nichtnegativen Prozeßgraden (Prozeßintensitäten, Prozeßniveaus) sind. Die Zerlegung des Vektors  $h$  in Teilvektoren  $f$  und  $g$  bezieht sich auf die Einteilung der Güter in finale und primäre Güter. Für jeden Prozeßgradvektor  $x$  definiert  $h^j = h^j(x)$  einen Prozeß (eine Aktivität). Mitunter wird auch die ganze Transformationsfunktion  $h^j$  als Prozeß oder Aktivität bezeichnet. Die Prozeßgrade  $x$  sind die eigentlichen Entscheidungsvariablen (Aktionsparameter) in der Aktivitätsanalyse.

Ist  $h_i^j(x)$  negativ, so ist das  $i$ -te primäre oder finale Gut ein Input des Prozesses  $h^j(x)$ ; es wird bei der Produktion in der Menge  $|h_i^j|$  verzehrt. Ist  $h_i^j(x)$  positiv, so ist das  $i$ -te Gut ein Output des Prozesses  $h^j(x)$ ; es wird in der Menge  $h_i^j$  erzeugt. Gilt  $h_i^j(x) = 0$ , so ist das  $i$ -te Gut an der Aktivität  $h^j(x)$  im Saldo nicht beteiligt. Man beachtet, daß der Notierung der Aktivitäten hier das Nettoprinzip zugrundeliegt. Für jedes Gut wird lediglich angegeben, ob es im Saldo Input oder Output ist. Bei Anwendung des Bruttoprinzips hätte man dagegen für jede Aktivität zwei Vektoren mit  $m$  Komponenten, einen Brutto-Inputvektor und einen Brutto-Outputvektor, zu definieren.

Ferner wird angenommen, daß sämtliche Güter stetig teilbar sind, daß die Prozeßgradvektoren stetig variieren können und daß es technisch möglich ist, sämtliche Aktivitäten gleichzeitig zu betreiben. Die Vereinbarungen von 1.1.1 und 1.1.2

liegen allen weiteren Ausführungen zugrunde.

1.1.3 Sind sämtliche  $n$  Transformationsfunktionen  $h^j$  homogene und lineare Funktionen allein des jeweiligen Prozeßgrades  $x_j$ , so ergibt sich das endliche lineare Produktionsmodell. Zur Beschreibung der Technologie der Wirtschaft genügt jetzt die Kenntnis der fixen Produktionskoeffizienten  $h_1^j(1) = a_1^j$  der mit Einheitsintensität  $x_j = 1$  betriebenen Prozesse  $h^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Man schreibt  $h^j(1) = (f^j(1), g^j(1))$  dann in der Form  $a^j = (a_F^j, a_P^j)$ , wobei das Subskript F sich auf finale und das Subskript P sich auf primäre Güter bezieht - der Zerlegung von  $h$  in  $f$  und  $g$  korrespondierend -, und stellt diese Basis- oder Elementarprozesse, wie sie heißen, in der technologischen Matrix

$$(1-1) \quad A = \left\| \begin{array}{ccc} (a_F^1)_1 & \dots & (a_F^n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_F^1)_r & \dots & (a_F^n)_r \\ (a_P^1)_1 & \dots & (a_P^n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (a_P^1)_s & \dots & (a_P^n)_s \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} A_F \\ A_P \end{array} \right\|$$

zusammen.

Die Linearität der Technologie drückt sich in folgenden beiden Grundeigenschaften der Gewinnung abgeleiteter Produktionsprozesse aus den ex definitione technisch durchführbaren Basisprozessen aus.

1. Homogenität (Gesetz des konstanten Ertragszuwachses und Durchschnittsertrags, "constant returns to scale"):

Ist  $a^j = (a_F^j, a_P^j)$  ein Basisprozeß, so ist auch der Prozeß  $y = a^j x_j = (a_F^j x_j, a_P^j x_j)$  für  $x_j \geq 0$  technisch möglich und durchführbar.

2. Additivität der Prozesse:

Sind  $y = a^j x_j$  und  $y' = a^{j'} x_{j'}$  zwei technisch durchführbare

Prozesse, so ist auch ihre Summe  $y + y'$  ein technisch durchführbarer Produktionsprozeß.<sup>2/</sup>

1.1.4 Die Technologie der betrachteten abstrakten Wirtschaft soll sich in den Modellen der Kapitel 1 bis 3 durch eine technologische Matrix der Ordnung  $m \times n$  -

$$(1-2) \quad A = \begin{pmatrix} A_F \\ A_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_F^j)_i \\ (a_P^j)_k \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r; \\ k = 1, 2, \dots, s; \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad m = r + s$$

mit fixen technischen Koeffizienten  $(a_F^j)_i$  und  $(a_P^j)_k$  ausdrücken lassen.

Um zu einer sinnvollen Theorie der Effizienz und der Dualität im linearen aktivitätsanalytischen Produktionsmodell zu gelangen, fordern wir die Gültigkeit der folgenden von Koopmans<sup>3/</sup> aufgestellten Postulate.

L 1: Für keinen Prozeßgradvektor  $x \geq 0$  ist die Gleichung  $Ax = 0$  erfüllbar.

L 2: Für keinen Prozeßgradvektor  $x \geq 0$  gilt  $Ax \geq 0$ .

L 3: Es existiert ein  $x^* \geq 0$ , so daß  $A_F x^* \geq 0$  gilt.

Die Annahme L 1 ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Produktion nicht umkehrbar sei. Ein nichttriviales (d.h. von Null verschiedenes) Produktionsergebnis  $Ax'$ ,  $x' \geq 0$ , kann nicht durch Produktion mittels derselben Technologie in seine Inputs zurückverwandelt werden. Gäbe es zu  $x'$  ein  $x'' \geq 0$ , so daß  $Ax'' = -Ax'$  wäre, so würde aus  $A(x' + x'') = 0$  wegen  $x' + x'' \geq 0$  ein Widerspruch zu L 1 resultieren. Mathematisch gesprochen, beinhaltet die Annahme L 1 die positive Unabhängigkeit der Basisprozeßvektoren  $a^j$ . Vektoren  $a^1, a^2, \dots, a^n$  heißen positiv (linear) unabhängig, wenn es keinen semipositiven Vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  gibt, der der Gleichung  $a^1 x_1 + a^2 x_2 + \dots + a^n x_n = 0$  genügt.

Nach Annahme L 2 ist kein positiver Output an irgendeinem Gut ohne den Input mindestens eines anderen Gutes möglich. Man nennt L 2 daher auch das Postulat von der "Unmöglichkeit des Schlaraffenlandes" ("Impossibility of the Land of Cockaigne" 4/).

Die dritte Annahme L 3 besagt, daß es eine Produktionsalternative gibt, bei der mindestens ein finales Gut in positiver Menge ohne den Nettoverzehr irgendeines anderen finalen Gutes erzeugt wird. Diese Eigenschaft der Technologie bezeichnet man als "Semi-Produktivität" der Matrix  $A_F$ . Eine Verschärfung von L 3 ist die Annahme voller "Produktivität" dieser Matrix:

L 3\*: Es existiert ein  $x^* \geq 0$ , so daß  $A_F x^* > 0$  gilt.

## 1.2 Herleitung einiger mathematischer Hilfsmittel

1.2.1 Im folgenden werden für spätere Erörterungen benötigte Ergebnisse der linearen Algebra zusammengestellt.

Lemma 1.1 (Minkowski/Farkas): Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung  $x \geq 0$ , wenn die Ungleichungen  $uA \geq 0$  und  $ub < 0$  keine gemeinsame Lösung  $u$  besitzen. 5/

Die Notwendigkeit der Bedingung des Lemmas 1.1 ist offenkundig; die Beziehung  $Ax^0 = b$  für ein  $x^0 \geq 0$  und zugleich  $u^0 A \geq 0$  und  $u^0 b < 0$  für ein  $u^0$  sind widersprüchlich, da dann  $u^0(Ax^0) = u^0 b < 0 \leq (u^0 A)x^0$  sein müßte. Dagegen ist ein rein algebraischer Nachweis der Hinlänglichkeit des Theorems mühevoll; es wird deshalb auf Arbeiten von Tucker<sup>6/</sup> und Gale<sup>7/</sup> verwiesen. Ein einfacher nicht-algebraischer Beweis sowie die geometrische Interpretation des Theorems finden sich im Abschnitt 1.5.2 dieser Arbeit.

Lemma 1.1 lautet gleichwertig in positiver Ausdrucksform:

Lemma 1.1\*: Die lineare Gleichung  $Ax = b$  besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung  $x \geq 0$ , wenn für alle  $u$ , welche die Ungleichung  $uA \geq 0$  erfüllen, die Beziehung  $ub \geq 0$  gilt.

Lemma 1.2: Die lineare Ungleichung  $Ax \leq b$  besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung  $x \geq 0$ , wenn die Ungleichungen  $uA \geq 0$  und  $ub < 0$  keine gemeinsame nichtnegative Lösung  $u \geq 0$  aufweisen.

Beweis.

Notwendigkeit: Daß die beiden Möglichkeiten einander ausschließen, ergibt sich aus dem andernfalls resultierenden Widerspruch

$$(1-3) \quad u^0(Ax^0) \leq u^0b < 0 \leq (u^0A)x^0 \quad \text{für ein } (x^0, u^0) \geq 0.$$

Hinlänglichkeit: Besitzt die Ungleichung  $Ax \leq b$  keine Lösung  $x \geq 0$ , so hat die Gleichung  $Ax + Iy = b$  gleichfalls keine Lösung  $(x, y) \geq 0$ . Nach dem Lemma 1.1 weisen daher die Ungleichungen  $uA \geq 0$ ,  $uI \geq 0$  und  $ub < 0$  eine Lösung  $u$  auf. Aus  $uI \geq 0$  folgt  $u \geq 0$ , q.e.d.

1.2.2 Folgendem Hilfssatz von Karlin<sup>8/</sup> ist wesentliche Bedeutung für einen eleganten Aufbau der Theorie der linearen Programmierung beizumessen. Es wird hier eine rein algebraische Formulierung und ein ebensolcher Beweis gegeben.

Lemma 1.3: Besitzen die Ungleichungen

$$(1-4) \quad Ax \leq a, \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad Bx \leq b, \quad x \geq 0$$

eine gemeinsame Lösung  $x^0$ , die Systeme

$$(1-5) \quad Ax \leq a, \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad Bx \leq b, \quad x \geq 0$$

dagegen keine gemeinsame Lösung, so existiert ein  $u^0 \geq 0$  und ein  $v^0 > 0$  mit der Eigenschaft, daß

$$(1-6) \quad u^0(a - Ax) + v^0(b - Bx) \leq 0$$

für alle  $x \geq 0$  gilt.

Bemerkung: Man vergleiche die im Abschnitt 1.5.2 gegebene geometrische Interpretation des Lemmas 1.3.

Beweis.

Der Beweis beruht auf der wiederholten Anwendung des Lemmas 1.2.

(a) Zunächst wird gezeigt, daß das System

$$(1-7) \quad uA + vB \geq 0, \quad vI \geq e$$

eine Lösung  $u^* \geq 0$ ,  $v^* \geq 0$  besitzt. Annahmegemäß haben die Ungleichungen

$$(1-8) \quad Ax \leq a, \quad Bx \leq b - \varepsilon e^j, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{für jedes } j$$

keine Lösung  $x \geq 0$ . Mithin existiert für jedes  $j$  nach dem Lemma 1.2 eine Lösung  $u^j \geq 0$ ,  $v^j \geq 0$  für

$$(1-9) \quad u^j A + v^j B \geq 0, \quad u^j a + v^j (b - \varepsilon e^j) < 0.$$

Für die  $j$ -te Komponente von  $v^j$  muß  $v_j^j > 0$  gelten, denn andernfalls wäre  $u^j a + v^j b < 0$  und das System (1-4) hätte nach dem Lemma 1.2 keine Lösung  $x^0 \geq 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Wählt man Konstanten  $\lambda_j > 0$  derart, daß  $\lambda_j v_j^j \geq 1$  wird, so stellen die Vektoren  $u^* = \sum_j \lambda_j u^j$  und  $v^* = \sum_j \lambda_j v^j$  eine Lösung von (1-7) dar.

(b) Jetzt wird untersucht, ob das System

$$(1-10) \quad Ax \leq \delta a, \quad Bx + Iy \leq \delta b, \quad y e > 0$$

eine Lösung  $(x^*, y^*, \delta^*) \geq 0$  aufweisen kann. Wäre eine solche Lösung vorhanden, so müßte  $(\delta^* a, \delta^* b) \neq 0$  sein, weil sonst das System (1-7) nach dem Lemma 1.2 keine nichtnegative Lösung besitzen würde. Es folgt  $\delta^* > 0$ , und damit würden die Ungleichungen

$$(1-11) \quad Ax \leq a, \quad Bx + Iy \leq b, \quad y \geq 0$$

bzw.

$$(1-12) \quad Ax \leq a, \quad Bx \leq b$$

die Lösung  $(x^*/\delta^*, y^*/\delta^*) \geq 0$  bzw.  $(x^*/\delta^*) \geq 0$  im Widerspruch zur Voraussetzung haben. Das System (1-10) besitzt also keine nichtnegativen Lösungen. Nach dem Lemma 1.2 existiert daher eine Lösung  $u^0 \geq 0, v^0 \geq 0$  der Ungleichungen

$$(1-13) \quad uA + vB \geq 0, \quad vI \geq e, \quad ua + vb \leq 0.$$

Es folgt  $v^0 > 0$ , und für alle  $x \geq 0$  gilt die behauptete Ungleichung (1-6).

1.2.3 Als Spezialfall des Lemmas 1.3 ergibt sich für  $A = 0$  und  $a = 0$  das

Lemma 1.4: Hat die Ungleichung  $Bx \geq b$  eine Lösung  $x^0 \geq 0$ , die Ungleichung  $Bx \geq b$  dagegen keine Lösung  $x \geq 0$ , so existiert ein Vektor  $v^0 > 0$ , so daß  $v^0(b - Bx) \geq 0$  für alle  $x \geq 0$  gilt, woraus insbesondere  $v^0B \leq 0$  folgt.

Der Beweis ist offenkundig.

Aus dem Lemma von Karlin folgt als weiteres Ergebnis dieser Art das

Lemma 1.5: Besitzen die Ungleichungen

$$(1-14) \quad Ax \geq 0, \quad Bx \geq 0$$

keine gemeinsame (bzw. keine gemeinsame nichtnegative) Lösung  $x$ , so existieren Vektoren  $u^0 \geq 0$  und  $v^0 > 0$  derart, daß

$$(1-15) \quad u^0A + v^0B = 0 \quad (\text{bzw. } u^0A + v^0B \leq 0)$$

gilt.

Beweis.

Schreibt man  $x = y - z$  mit  $(y, z) \geq 0$ , so läßt sich auf die Ungleichungen (1-14) das Lemma 1.3 mit  $a = b = 0$  anwenden. Es

sichert die Existenz von Vektoren  $u^0 \geq 0$ ,  $v^0 > 0$ , so daß

$$(1-16) \quad (u^0 A + v^0 B)(y - z) \leq 0 \quad \text{für alle } y \geq 0, z \geq 0.$$

Daraus folgt  $u^0 A + v^0 B = 0$ , sofern  $z$  beliebig nichtnegativ gewählt werden darf. Existiert lediglich keine gemeinsame nichtnegative Lösung  $x^0$  für (1-14), so ist  $z \leq y$ , und aus (1-16) läßt sich nur die Gültigkeit der Ungleichung  $u^0 A + v^0 B \leq 0$  erschließen, q.e.d.

Als Spezialfall dieses Hilfssatzes gewinnt man das

Lemma 1.6: Die lineare Ungleichung  $Bx \geq 0$  besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung  $x^0$ , wenn die Ungleichung  $vB \leq 0$  keine positive Lösung  $v > 0$  besitzt.

Beweis.

Notwendigkeit: Daß die beiden Alternativen einander ausschließen, ergibt sich aus dem andernfalls resultierenden Widerspruch  $(v^0 B)x^0 \leq 0 < v^0(Bx^0)$ .

Hinlänglichkeit: Diese folgt unmittelbar aus dem Lemma 1.5 für  $A = 0$ , q.e.d.

Weitere Ergebnisse der dargestellten Art findet man bei Gale<sup>2/</sup>.

### 1.3 Effiziente Produktion und duale Freissysteme

1.3.1 Es wurde erwähnt, daß aktivitätsanalytische Modelle von ihrer institutionalen Interpretation weitgehend unabhängig sind. Wir wollen in diesem Kapitel 1 ohne Spezifikation des eigentlichen institutionellen Rahmens des Modells unterstellen, daß sowohl finale als auch primäre Güter begehrt in dem Sinne sind, daß ein mengenmäßiges Mehr von ihnen jedenfalls einem mengenmäßigen Weniger vorgezogen wird.

Bezeichnet man die Menge der im jeweiligen Modell zugelassenen Produktionsalternativen als den Produktionsraum des Modells, so sind wir an der Beschreibung derjenigen Punk-

te  $\bar{y} = A\bar{x}$ ,  $\bar{x} \geq 0$ , des Produktionsraumes des gegenwärtigen Modells,

$$(1-17) \quad Y = Y(A) = \{ y \mid y = Ax, x \in E_n^+ \},$$

interessiert, von denen aus eine Vermehrung des Ausstoßes eines Gutes ohne Verminderung des Ausstoßes mindestens eines anderen Gutes nur durch Verletzung der Grenzen von  $Y(A)$  möglich ist. Derartige Punkte  $\bar{y}$  werden effiziente Punkte des Produktionsraumes  $Y(A)$  genannt. Die Effizienz, d.h. technische Maximalität, ist eine notwendige Bedingung für die Optimalität einer Produktionsalternative im Sinne irgendeines ökonomischen Optimalitätskriteriums, sofern keine Sättigungserscheinungen auftreten.

Wir erklären also:

Definition 1.1:  $Z = \{z\}$  sei eine Punktmenge in  $E_z$ . Ein Element  $\bar{z}$  von  $Z$  heißt maximal auf  $Z$ , wenn es kein  $z^* \in Z$  gibt, das die Ungleichung  $z^* \geq \bar{z}$  befriedigt. Ein Element  $\bar{z}$  von  $Z$  heißt minimal auf  $Z$ , wenn es kein  $z^* \in Z$  gibt, welches der Ungleichung  $z^* \leq \bar{z}$  genügt.

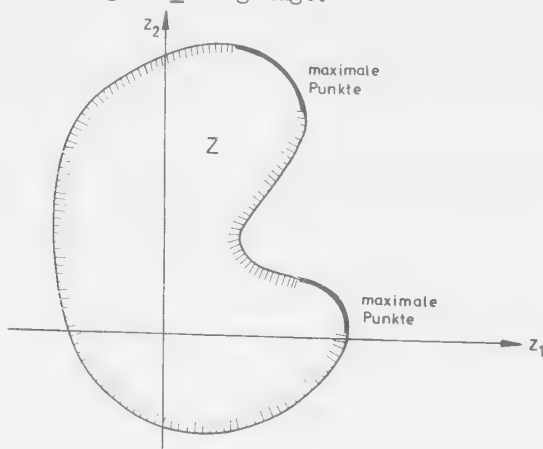


Abb. 1: Vektormaximale Punkte

Ein verwandtes Konzept ist das der Slater-Maximalität<sup>10/</sup>:

Definition 1.2: Ein Element  $\bar{z}$  von  $Z$  heißt Slater-maximal auf  $Z$ , kurz: S-maximal, wenn es kein  $z^* \in Z$  mit der Eigenschaft  $z^* > \bar{z}$  gibt.

Entsprechend diesen Definitionen läuft das Problem der effizienten Produktion darauf hinaus, die maximalen Punkte des Produktionsraumes  $Y(A)$  zu ermitteln.

Definition 1.3: Ein Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y(A)$  heißt effizient, wenn  $\bar{y}$  im Sinne der Definition 1.1 maximal auf  $Y(A)$  ist.

1.3.2 Jeder effiziente Punkt  $\bar{y} \in Y(A)$  läßt sich, wie Koopmans<sup>11/</sup> in seiner grundlegenden Arbeit (1951) gezeigt hat, dadurch kennzeichnen, daß ihm ein System von positiven Verrechnungspreisen oder Schattenpreisen zugeordnet ist, die, sofern in der betrachteten Wirtschaft Märkte definiert sind, mit den Wettbewerbspreisen auf diesen Märkten identifiziert, aber auch unabhängig von irgendwelchen Märkten bestimmt werden können. Dem primalen Problem, maximale Gütermengenkombinationen zu finden, entspricht das duale Problem, Vektoren von Schattenpreisen mit bestimmten, weiter unten beschriebenen Eigenschaften zu ermitteln. Diese beiden Probleme bilden den Gegenstand unserer Studie.

Die folgenden Theoreme summieren den Hauptinhalt des Abschnitts 4 (section 4) der oben zitierten Arbeit von Koopmans. Während Koopmans zum Beweis dieser Lehrsätze die geometrische Theorie der polyedrischen Kegel herangezogen hat, werden hier einfache algebraische Beweise entwickelt.<sup>12/</sup>

Das allgemeine Effizienzkriterium lautet:

Satz 1.1: Notwendig und hinreichend für die Effizienz eines Produktionsergebnisses  $\bar{y} \in Y(A)$  ist die Existenz eines Vektors von Schattenpreisen  $\bar{p} > 0$  mit der Eigenschaft, daß

$$(1-18) \quad \bar{p}A \leq 0 \quad \text{und} \quad \bar{p}\bar{y} = 0$$

gilt.

### Beweis.

Notwendigkeit: Der Vektor  $\bar{y} = A\bar{x} \in Y(A)$  sei effizient. Wendet man das Lemma 1.4 mit  $B = A$ ,  $b = \bar{y}$  und  $x^0 = \bar{x}$  an, so wird man zur Existenz eines Vektors  $v^0 = \bar{p} > 0$  geführt, für welchen  $\bar{p}A \leq 0$  sowie  $\bar{p}Ax \leq \bar{p}\bar{y}$  für alle  $x \geq 0$  gilt. Für  $x = 0$  folgt  $\bar{p}\bar{y} \geq 0$ , andererseits aber wegen  $\bar{p}\bar{y} = \bar{p}A\bar{x} \leq 0$  (da  $\bar{x} \geq 0$ )  $\bar{p}\bar{y} = 0$ .

Hinlänglichkeit: Die Bedingungen (1-18) seien für ein  $\bar{y} \in Y(A)$  erfüllt. Gäbe es ein  $y^* = Ax^* \in Y(A)$  mit der Eigenschaft  $y^* \geq \bar{y}$ , so würde wegen  $\bar{p} > 0$  die Ungleichung  $\bar{p}y^* = \bar{p}Ax^* > \bar{p}\bar{y} = 0$  im Widerspruch zu der gewiß wegen  $x^* \geq 0$  gültigen Ungleichung  $\bar{p}Ax^* \leq 0$  folgen, q.e.d.

Der Ausdruck  $py$  kann als Nettowert des Produktionsergebnisses  $y$  zu Preisen  $p$  betrachtet werden. Ein effizientes Produktionsergebnis zeichnet sich also dadurch aus, daß zu ihm ein Preissystem gehört, das den Nettowert der Produktion für keine Produktionsalternative aus  $Y$  positiv, für das effiziente Ergebnis selbst aber auch nicht negativ werden läßt. Legt man das schwächere Konzept der S-Maximalität bei der Definition der Effizienz zugrunde, so tritt im Satz 1.1 nur die Änderung ein, daß  $\bar{p}$  statt strikt positiv nur semipositiv ( $\bar{p} \geq 0$ ) sein muß.

1.3.3 Es soll nun das Zustandekommen eines effizienten Produktionsergebnisses  $\bar{y}$  näher betrachtet werden. Zunächst sei bemerkt, daß der Punkt  $y = 0$ , der stets in  $Y(A)$  enthalten ist, effizient im Sinne der Definition 1.3 ist, denn nach Annahme L 2 über lineare Technologien (vgl. S.14) gibt es in  $Y$  kein  $y$  mit  $y \geq 0$ . Dieser Punkt soll der triviale effiziente Punkt heißen. Es sei nun  $\bar{y} = A\bar{x} \neq 0$  und  $\bar{y} \in Y(A)$ . Daraus folgt  $\bar{x} \geq 0$ . Wir können den Vektor  $\bar{x}$  also in die Teilvektoren  $\bar{x}^{(1)} = 0$  und  $\bar{x}^{(2)} > 0$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$  zerlegen, wobei erforderlichenfalls die Komponenten von  $\bar{x}$  umzunummerieren sind. Entsprechend dieser Zerlegung läßt sich die Matrix  $A$  umordnen:  $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \end{pmatrix}$ . Diese Unterteilung hängt ersichtlich (über

$\bar{x}$ ) von  $\bar{y}$  ab. Als Korollar aus dem Satz 1.1 ergibt sich der

Satz 1.2: Ein nichttriviales Produktionsergebnis  $\bar{y}$  aus  $Y(A)$  ist dann und nur dann effizient, wenn die Bedingung

$$(1-19) \quad \bar{p} A^{(1)} \leq 0, \quad \bar{p} A^{(2)} = 0$$

für ein  $\bar{p} > 0$  erfüllt ist.

### Beweis.

Notwendigkeit:  $\bar{y} = A\bar{x} \in Y(A)$  sei ein nichttrivial effizientes Produktionsergebnis. Es folgt, daß es einen nichtleeren Vektor  $\bar{x}^{(2)}$  gibt. Nach dem vorigen Satz existiert ein  $\bar{p} > 0$ , das die Bedingungen

$$(1-20) \quad \bar{p} \| A^{(1)} A^{(2)} \| \leq 0 \quad \text{und} \quad \bar{p} \| A^{(1)} A^{(2)} \| \bar{x} = 0$$

erfüllt. Die erste Bedingung (1-20) ergibt  $\bar{p} A^{(1)} \leq 0$  und die zweite Bedingung (1-20) vereinfacht sich zu  $\bar{p} A^{(2)} \bar{x}^{(2)} = 0$ . Ferner muß  $\bar{p} A^{(2)} \leq 0$  sein. Gälte nun  $\bar{p} A^{(2)} < 0$ , so würde wegen  $\bar{x}^{(2)} > 0$  die Ungleichung  $\bar{p} A^{(2)} \bar{x}^{(2)} < 0$  folgen. Es muß also  $\bar{p} A^{(2)} = 0$  sein.

Hinlänglichkeit: Es sei  $\bar{y} = A\bar{x} = \| A^{(1)} A^{(2)} \| \begin{pmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ \bar{x}^{(2)} \end{pmatrix}$  mit  $\bar{x}^{(1)} = 0$  und  $\bar{x}^{(2)} > 0$ . Sind nun die Bedingungen (1-19) erfüllt, so folgt  $\bar{p} A^{(2)} \bar{x}^{(2)} = 0$  und daraus

$$(1-21) \quad \bar{p} A^{(2)} \bar{x}^{(2)} = \bar{p} A \bar{x} = \bar{p} \bar{y} = 0.$$

Nach Satz 1.1 ist  $\bar{y}$  daher effizient, q.e.d.

Bemerkung. Das Ergebnis des letzten Satzes beleuchtet eine wesentliche Struktureigenschaft des linearen Produktionsmodells ohne Güterrestriktionen. Die Bedingungen (1-19) sind unabhängig von dem speziellen Punkt  $\bar{y} = \| A^{(1)} A^{(2)} \| \begin{pmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ \bar{x}^{(2)} \end{pmatrix}$  in

dem Sinne, daß mit  $\bar{y}$  auch alle Punkte  $y' \in Y(A)$  mit der Darstellung

$$(1-22) \quad y' = A^{(2)} x^{(2)}, \quad x^{(2)} \geq 0$$

effizient sind, da sie ebenfalls die Bedingungen (1-19) befriedigen. Daß sämtliche Punkte  $y'$  aus (1-22) in  $Y(A)$  enthalten sind, erkennt man aus der Darstellung

$$(1-23) \quad y' = \|A^{(1)} \quad A^{(2)}\| \begin{pmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x^{(2)} \geq 0.$$

Die so bestimmten Produktionsergebnisse  $y'$  bilden eine höchstens  $(m-1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit in  $E_m^+$ . In der Tat befriedigen sie sämtlich die Gleichung  $\bar{p}y' = 0$ , sind also in einer Hyperebene der Dimension  $m-1$  enthalten. Algebraisch drückt sich diese Tatsache darin aus, daß die Teilmatrix  $A^{(2)}$  höchstens den Rang  $m-1$  besitzen kann. Wäre ihr Rang gleich  $m$ , so würde die Gleichung  $\bar{p}A^{(2)} = 0$  nur die triviale Lösung  $\bar{p} = 0$  besitzen. Das Ergebnis des Satzes 1.2 gestattet mithin die numerische Bestimmung des Preisvektors  $\bar{p}$ , sofern die Teilmatrix  $A^{(2)}$  bekannt ist.

Da die Effizienz eine Eigenschaft der Matrix  $A^{(2)}$  und nicht allein eines einzelnen Vektors  $\bar{y}$  ist, spricht man von ihr als einer effizienten Teilmatrix und auch von effizienten Basisprozessen  $(a^j)^{(2)}$  bzw., geometrisch ausgedrückt, von einer effizienten Seitenfläche des polyedrischen Kegels  $Y(A)$ .

1.3.4 Bislang sind Eigenschaften effizienter Punkte und Prozesse im Raum der Produktionsalternativen erörtert worden, ohne daß der Nachweis erbracht worden wäre, daß außer dem trivialen effizienten Punkt  $y = 0$  überhaupt andere effiziente Punkte existieren.

Koopmans<sup>13/</sup> hat den Existenzbeweis auf einem topologischen Argument und den Eigenschaften der polyedrischen konvexen Kegel aufgebaut. Es soll hier ein algebraischer Beweis gegeben werden. Dazu wird ein auch anderweitig nützlicher Hilfssatz bewiesen.

Lemma 1.7: Fügt man einer aus  $n$  Basisprozessen bestehenden linearen Technologie  $A^n = \|a^j\|$  einen weiteren Basisprozeß  $a^{n+1}$  hinzu und ist der Prozeß  $a^{n+1}$  in der erweiterten Technologie  $A^{n+1} = \|A^n \ a^{n+1}\|$ , welche die Annahme L 2 erfüllen möge, nicht effizient, so bleiben die in  $Y(A^n)$  effizienten Prozesse auch in  $Y(A^{n+1})$  effizient.

Beweis.

In der Technologie  $A^n$  sei  $a^j$  ein beliebiger effizienter Prozeß. Notwendig und hinreichend für die Effizienz ist nach Satz 1.2 die Existenz eines  $\bar{p} > 0$  mit

$$(1-24) \quad \bar{p}A^n \leq 0 \quad \text{und} \quad \bar{p}a^j = 0.$$

Die Ineffizienz von  $a^{n+1}$  bedeutet, daß ein  $z^* = (x^*, \delta^*) \geq 0$  mit

$$(1-25) \quad A^{n+1}z^* = A^n x^* + a^{n+1} \delta^* \geq a^{n+1}$$

vorhanden ist, woraus  $A^n x^* \geq a^{n+1}(1-\delta^*)$  und wegen Annahme L 2  $(1-\delta^*) > 0$  folgt. Hieraus ergibt sich zusammen mit (1-24) die Ungleichung  $\bar{p}a^{n+1}(1-\delta^*) < 0$  und  $\bar{p}a^{n+1} < 0$ .

Wäre nun der Prozeß  $a^j$  in der erweiterten Technologie  $A^{n+1}$  ineffizient, so müßte ein Vektor  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{\delta}) \geq 0$  mit der Eigenschaft

$$(1-26) \quad A^{n+1}\bar{z} = A^n \bar{x} + a^{n+1} \bar{\delta} \geq a^j$$

vorhanden sein. Multipliziert man (1-26) mit  $\bar{p}$ , so resultiert  $\bar{p}a^{n+1}\bar{\delta} > 0$  bzw.  $\bar{p}a^{n+1} > 0$ . Dieser Widerspruch zum obigen Ergebnis beweist die Richtigkeit der Behauptung.

Jetzt läßt sich folgender Existenzsatz aussprechen:

Satz 1.3: Bei Gültigkeit der Annahmen L 2 und L 3 über lineare Technologien existiert mindestens ein (nichttrivialer) effizienter Basisprozeß.

### Beweis.

Es wird ein induktiver Beweis gegeben. Die technologische Matrix  $A$  bestehe zunächst aus einem einzigen Prozeß  $a^1$ . Wäre nun  $a^1$  ineffizient, so gäbe es ein  $x_1^* \geq 0$  mit  $a_1^1 x_1^* \geq a^1$ , woraus  $x_1^* \neq 1$  folgt. Nach Postulat L 3 gibt es in  $a^1$  mindestens eine Komponente  $a_i^1 > 0$  und daher nach Postulat L 2 auch mindestens eine Komponente  $a_k^1 < 0$  ( $k \neq i$ ). Aus  $x_1^* < 1$  resultiert in  $a_i^1 x_1^* < a_i^1$  und für  $x_1^* > 1$  in  $a_k^1 x_1^* < a_k^1$  ein Widerspruch. Damit muß  $a^1$  effizient sein.

Der Satz sei für die Matrix  $A^n$  mit  $n$  Basisprozessen richtig. Gezeigt wird, daß er dann auch für die Matrix  $A^{n+1} = \|A^n \ a^{n+1}\|$  Gültigkeit haben muß, sofern  $A^{n+1}$  die Annahmen L 2 und L 3 erfüllt. Ist  $a^{n+1}$  in  $Y(A^{n+1})$  effizient, so ist der Beweis vollendet. Ist dagegen  $a^{n+1}$  in  $Y(A^{n+1})$  nicht effizient, so existiert ein Vektor  $z^* = (x^*, \delta^*) \geq 0$  mit

$$(1-27) \quad A^{n+1} z^* \geq a^{n+1} \quad \text{bzw.} \quad A^n x^* \geq a^{n+1} (1 - \delta^*),$$

und aus der Gültigkeit von L 2 folgt  $1 - \delta^* > 0$ . Ist jetzt  $z^0 = (x^0, \delta^0) \geq 0$  der nach L 3 vorhandene Vektor mit

$$(1-28) \quad A_F^n z^0 \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad A_F^n x^0 + a_F^{n+1} \delta^0 \geq 0,$$

so gilt

$$(1-29) \quad A_F^n \left( x^0 + \frac{\delta^0}{1 - \delta^*} x^* \right) \geq 0, \quad x^0 + \frac{\delta^0}{1 - \delta^*} x^* \geq 0,$$

und  $A^n$  erfüllt mithin L 3 und auch L 2. Nach Induktionsannahme gibt es daher in  $A^n$  einen effizienten Basisprozeß  $a^j$ , der nach Lemma 1.7 in  $Y(A^{n+1})$  effizient geblieben sein muß, q.e.d.

## 1.4 Sindeutigkeitsätze über Preissysteme bei effizienter Produktion

1.4.1 Ist  $\bar{y} \in Y(A)$  ein nichttrivial effizienter Punkt, so existiert eine Teilmatrix  $A^{(2)}$  von  $A$  mit der Eigenschaft, daß für einen Preisvektor  $\bar{p} > 0$  die Gleichung  $\bar{p} A^{(2)} = 0$  besteht. Wir wollen die Frage untersuchen, unter welchen Bedingungen

das Preissystem  $\bar{p}$ , von einem positiven Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  abgesehen, der die Höhe des Preisniveaus bestimmt, eindeutig ist.

Darüber Auskunft gibt der folgende

Satz 1.4: Hinreichend dafür, daß der dem nichttrivial effizienten Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y(A)$  zugeordnete Schattenpreisvektor  $\bar{p}$  eindeutig bis auf einen Proportionalitätsfaktor  $\lambda > 0$  sei, ist die Bedingung, daß  $A^{(2)}$  den Rang  $m-1$  besitzt.

Beweis.

Ist  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)} \neq 0$  effizient, so befriedigt  $\bar{p}$  das Gleichungssystem  $\bar{p} A^{(2)} = 0$ . Ist nun der Rang von  $A^{(2)}$  gleich  $m-1$ , so hat dieses System genau eine Lösung  $q p^* \neq 0$ , die mit der bereits bekannten Lösung  $\lambda \bar{p}$  zusammenfällt. Der Vektor  $\bar{p}$  ist mithin eindeutig, q.e.d.

Man könnte vermuten, daß die Rangbedingung des Satzes 1.4 auch notwendig sei. Dies ist jedoch nicht ohne weiteres richtig, wie folgendes einfache Beispiel mit  $m = 3$  Gütern und  $n = 4$  Elementarprozessen lehrt. Die technologische Matrix sei

$$(1-30) \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ \hline 0,4 & 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & 0,3 & 0,5 \\ -1,0 & -1,0 & -1,0 & -1,0 \end{array} \end{array}.$$

Der Prozeß  $a^1 = (0,4, 0,4, -1,0)$  ist effizient, denn er erfüllt zusammen mit dem Preisvektor  $\bar{p} = (1, 1, 4/5)$  das allgemeine Effizienzkriterium. Dies ist aber auch der einzige (mit  $p_1 = 1$  normierte) positive Preisvektor, obwohl die Matrix  $A^{(2)} = \| a^1 \|$  den Rang  $m-2 = 1$  besitzt.

1.4.2 Zerlegt man nach etwaiger Umnumerierung der Basisprozesse die technologische Matrix in  $A = \| A^I \quad A^{II} \|$ , worin  $A^{II}$  die Elementarprozesse von  $A^{(2)}$  und die von ihnen linear abhängigen Elementarprozesse von  $A^{(1)}$  zusammenfaßt, und defi-

niert man

$$(1-31) \quad Y(A^{II}) = \left\{ y \mid y = A^{II} x^{II}, \quad x^{II} \geq 0 \right\},$$

so läßt sich folgende Umkehrung des Satzes 1.4 verzeichnen:

Satz 1.5: Zieht die Beziehung  $y \in Y(A^{II})$  für jede Darstellung  $y = Ax$ ,  $x \geq 0$ , die Gleichung  $x^I = 0$  nach sich (wobei  $x = (x^I, x^{II})$  gesetzt ist), so ist die im Satz 1.4 genannte Rangbedingung auch notwendig für die Eindeutigkeit des  $\bar{y}$  zugeordneten Schattenpreisvektors  $\bar{p}$ .

### Beweis.

Es gebe ein und nur ein  $\bar{p} > 0$  mit  $\bar{p}A \leq 0$  und  $\bar{p}A^{(2)} = 0$ .

Der Rang von  $A^{(2)}$  kann nicht größer als  $m-1$  sein. Angenommen,  $A^{(2)}$  besitze einen kleineren Rang als  $m-1$ . Dann läßt sich ein von  $\bar{p}$  linear unabhängiges  $p^0 \neq 0$  mit  $p^0 A^{(2)} = 0$  finden. Zwei Fälle sind zu trennen:

- (a) Ist  $A^{II} = A$ , so gilt für beliebiges  $q$  die Gleichung  $(\bar{p} + qp^0)A = 0$ , und der Vektor  $\bar{p} + qp^0$  ist für  $q \neq 0$  linear unabhängig von  $\bar{p}$  und für  $q \neq 0$  mit hinreichend kleinem Absolutbetrag von  $q$  positiv. Dies widerspricht der Eindeutigkeit des Preisvektors  $\bar{p}$ .
- (b) Ist dagegen  $A^I$  nicht leer, so existiert ein  $\hat{p} \neq 0$ , welches die Ungleichung  $\hat{p}A^I < 0$  und die Gleichung  $\hat{p}A^{II} = 0$  befriedigt. In der Tat besitzen die Gleichungen

$$(1-32) \quad A^{II} x^{II} = A^{II} \hat{x}^{II} + A^I x^I, \quad x^I e = 1$$

keine gemeinsame Lösung  $(x^I, x^{II}, \hat{x}^{II}) \geq 0$ , denn für eine solche würde  $x^I = 0$  nach Voraussetzung gelten. Nach dem Lemma 1.1 weisen daher die Ungleichungen

$$(1-33) \quad pA^{II} \geq 0, \quad -pA^{II} \geq 0, \quad -pA^I \geq -\delta e, \quad -\delta > 0$$

eine gemeinsame Lösung  $(\hat{p}, \hat{\delta})$  auf, d.h., es gilt  $\hat{p}A^{II} = 0$  und  $\hat{p}A^I < 0$ . Der Vektor  $\bar{p} + \varepsilon(\hat{p} + qp^0)$  läßt sich für jedes  $q$  durch die Wahl eines  $\varepsilon = \varepsilon(q) \neq 0$  mit hinreichend klei-

nem Absolutbetrag  $|\varepsilon|$  positiv machen, ist für  $q \neq 0$  linear unabhängig von  $\bar{p}$  und erfüllt für derartiges  $q$  mit hinreichend kleinem Absolutbetrag  $|q|$  die Beziehungen  $(\bar{p} + \varepsilon(\bar{p} + qp^0))A^{II} = 0$  und  $(\bar{p} + \varepsilon(\bar{p} + qp^0))A^I \leq 0$ , was wiederum der Eindeutigkeit von  $\bar{p}$  widerspricht.

Mithin muß die Matrix  $A^{(2)}$  genau den Rang  $m-1$  besitzen, q.e.d.

1.4.3 Für die ökonomischen Anwendungen leichter zu handhaben und gewöhnlich ausreichend ist folgendes Ergebnis, das keine zusätzliche Annahme der im Satz 1.5 genannten Art erfordert:

Satz 1.6: Ist der einem nichttrivial effizienten Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y(A)$  zugeordnete Schattenpreisvektor  $\bar{p}$  eindeutig (bis auf einen Proportionalitätsfaktor), so besitzt die technologische Matrix  $A$  eine effiziente Teilmatrix  $A^*$  mit dem Rang  $m-1$ , und es gilt  $\bar{y} \in Y(A^*)$ .

Beweis.

Nach dem Satz 1.1 besteht für  $\bar{p}$  die Ungleichung  $\bar{p}A \leq 0$ . Die Matrix  $A^*$ , die aus allen Basisprozessen gebildet wird, für die  $\bar{p}a^j = 0$  gilt, ist gewiß nicht leer. Zerlegt man die technologische Matrix nach etwaiger Umnummerierung der Prozesse in  $A = \begin{bmatrix} A^* & A^{**} \end{bmatrix}$ , so resultiert  $\bar{p}A^* = 0$  und, falls  $A^{**}$  nicht leer ist,  $\bar{p}A^{**} < 0$ . Mit dem beim Beweis des Satzes 1.5 angewandten Verfahren läßt sich sodann zeigen, daß  $A^*$  bei Eindeutigkeit von  $\bar{p}$  den Rang  $m-1$  besitzt. Überdies ist nach dem Satz 1.2 jedes Produktionsergebnis  $y^* \in Y(A^*)$  effizient, und es gilt insbesondere  $\bar{y} \in Y(A^*)$ , q.e.d.

## 1.5 Effiziente Ergebnisse in einem linearen Produktionsmodell

1.5.1 Bislang war unsere Untersuchung auf das endliche lineare Produktionsmodell beschränkt, bei dem eine nur endliche Zahl von Elementarprozessen den technologischen Horizont der betrachteten abstrakten Wirtschaft bildet. Dieses Modell erscheint umfassend genug für den überwiegenden Teil

der Anwendungen linearer Technologien, denn die Zahl der Elementarprozesse kann, wenngleich endlich, so doch von exorbitanter Größe sein. Trotzdem ist es für manche theoretischen Überlegungen nützlich, ein noch allgemeineres Produktionsmodell aufzustellen, in dem die Anzahl der Elementarprozesse unendlich (sogar überabzählbar unendlich) sein darf. Beispielsweise wird man sich bei der Berücksichtigung der räumlichen Ordnung der Produktion (der Standortverteilung der Prozeßträger) sowie bei der Untersuchung des zeitlichen Aufbaus der Produktion des allgemeineren Modells bedienen. Aus Gründen der Vollständigkeit soll das allgemeine lineare Produktionsmodell hier skizziert und namentlich das allgemeine Effizienzkriterium formuliert werden.

Gegeben sei eine (nichtleere) Menge  $S$  von Elementarprozessen  $a$  im Raum  $E_m$ . Von  $S$  wird in analytischer Hinsicht in der Regel vorausgesetzt, daß es eine kompakte, d.h. abgeschlossene und beschränkte Punktmenge darstelle. Per definitionem ist jede aus endlich vielen Punkten bestehende Menge kompakt, so daß das endliche Modell als Sonderfall im allgemeinen Ansatz enthalten ist. Aus den Elementarprozessen  $a, a' \in S$  lassen sich aufgrund der Linearität der Technologie neue Prozesse durch Linearkombination  $y = ax_1 + a'x_2, x_1, x_2 \geq 0$ , bilden. Aus den so gewonnenen kombinierten Prozessen lassen sich wiederum neue Prozesse ableiten, usw. Die Menge aller so erreichbaren Produktionsalternativen läßt sich als die Menge aller endlichen nichtnegativen Linearkombinationen von Elementarprozessen  $a^j \in S$  darstellen:

$$(1-34) \quad Y(S) = \left\{ y \mid y = \sum_j a^j x_j, \quad x_j \geq 0, \quad a^j \in S, \right. \\ \left. j=1, 2, \dots, n; n \text{ beliebig endlich} \right\}.$$

Die Menge  $Y(S)$  bildet ersichtlich einen konvexen Kegel im Raum  $E_m$ . Eine Punktmenge  $K$  heißt ein konvexer Kegel, wenn sie folgende zwei Eigenschaften besitzt:

1.  $x \in K, \lambda \geq 0$  implizieren  $\lambda x \in K$ ,
2.  $x, x' \in K$  impliziert  $x + x' \in K$ .

Jeder konvexe Kegel ist eine konvexe Punktmenge. Eine Punktmenge  $M$  heißt konvex, wenn aus  $x, x' \in M$  für jedes  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  die Beziehung  $\alpha x + (1-\alpha)x' \in M$  folgt.

$Y(S)$  bildet, genauer gesagt, den von der Menge  $S$  aufgespannten, d.i. den kleinsten die Menge  $S$  enthaltenden konvexen Kegel. Aus der Kompaktheit von  $S$  folgt, daß  $Y(S)$  abgeschlossen ist.

1.5.2 Bei der Analyse der Eigenschaften des allgemeinen linearen Produktionsmodells wie auch des später zu behandelnden nichtlinearen Produktionsmodells spielen mengentheoretische Methoden anstelle der bisher benutzten finiten algebraischen Verfahren eine entscheidende Rolle, insbesondere die Dualitätstheorie der konvexen Kegel. Das folgende Separationstheorem bildet die mathematische Grundlage dieser Arbeit:

Lemma 1.8:  $K$  sei ein nichtleerer konvexer Kegel in  $E_m$  und  $b$  sei ein nicht in der abgeschlossenen Hülle  $\langle K \rangle$  von  $K$  enthaltener Punkt von  $E_m$ . Dann existiert ein Vektor  $\bar{u} \neq 0$ , so daß

$$(1-35) \quad \bar{u}y \geq 0 \quad \text{für alle } y \in K$$

und zudem

$$(1-36) \quad \bar{u}b < 0$$

gilt.

Beweis.

Aus den Annahmen über  $K$  folgt, daß auch  $\langle K \rangle$  ein nichtleerer, abgeschlossener konvexer Kegel in  $E_m$  ist. Wegen der Abgeschlossenheit von  $\langle K \rangle$  läßt sich ein Punkt  $\bar{y} \in \langle K \rangle$  durch die Bedingung

$$(1-37) \quad |\bar{y} - b| = \min_{y \in \langle K \rangle} |y - b|$$

definieren.<sup>14/</sup> Man setze  $\bar{u} = \bar{y} - b$ . Offenbar ist  $\bar{u} \neq 0$ . Wegen der Konvexität von  $\langle K \rangle$  gilt für jedes  $y \in \langle K \rangle$  und für alle  $\delta$

mit  $0 \leq \delta \leq 1$  die Beziehung  $(1-\delta)\bar{y} + \delta y = \bar{y} + \delta(y-\bar{y}) \in \langle K \rangle$ .

Nach (1-37) ist

$$(1-38) \quad |\bar{y} + \delta(y-\bar{y}) - b|^2 = |\bar{u} + \delta(y-\bar{y})|^2 \geq |\bar{y} - b|^2 = |\bar{u}|^2,$$

woraus nach Auflösung

$$(1-39) \quad 2\delta \bar{u}(y-\bar{y}) + \delta^2 |y-\bar{y}|^2 \geq 0$$

für jedes  $\delta$  mit  $0 \leq \delta \leq 1$  resultiert. Daraus ergibt sich

$$(1-40) \quad \bar{u}(y-\bar{y}) \geq 0 \text{ für alle } y \in \langle K \rangle.$$

Für  $y = 0 \in \langle K \rangle$  folgt aus (1-40)  $\bar{u}\bar{y} \leq 0$ . Wäre nun  $\bar{u}\bar{y} < 0$ , so wäre für  $\lambda > 1$  sowohl  $\bar{u}(\lambda\bar{y} - \bar{y}) < 0$  als auch  $\lambda\bar{y} \in \langle K \rangle$  im Widerspruch zu (1-40). Also gilt  $\bar{u}\bar{y} = 0$  und demnach

$$(1-41) \quad \bar{u}y \geq 0 \text{ für alle } y \in \langle K \rangle.$$

Ferner ist  $\bar{u}b = \bar{u}(\bar{y} - \bar{u}) = -|\bar{u}|^2 < 0$ , q.e.d.

Das Lemma 1.1 ist als finiter Spezialfall im Lemma 1.8 enthalten:

Korollar (Hilfslängigkeit der Bedingung des Lemmas 1.1):

Besitzt die Gleichung  $Ax = b$  keine Lösung  $x \geq 0$ , so gibt es ein  $u^0 \neq 0$ , so daß  $u^0 A \geq 0$  und  $u^0 b < 0$  gilt.

Beweis.

Die Menge  $K = \langle K \rangle = \{y \mid y = Ax, x \geq 0\}$  stellt ersichtlich einen abgeschlossenen konvexen Kegel dar, der zumindest den Punkt  $0 \in E_y$  enthält, den Punkt  $b$  jedoch nicht enthält. Lemma 1.8 sichert demnach die Existenz eines  $u^0 \neq 0$  mit der Eigenschaft, daß  $u^0 y \geq 0$  für alle  $y \in K$  und zugleich  $u^0 b < 0$  gilt. Aus  $u^0 y = u^0 Ax \geq 0$  für alle  $x \geq 0$  folgt  $u^0 A \geq 0$ , q.e.d.

Die grundlegenden Theoreme 1.1 und 1.8 gestatten folgende geometrische Veranschaulichung. Ist der Vektor  $b$  kein Element des konvexen Kegels  $\langle K \rangle$ , so existiert eine Hyperebene  $H = \{y \mid \bar{u}y = 0\}$  mit der Eigenschaft, daß  $K$  im oberen Halbraum  $H^+ = \{y \mid \bar{u}y \geq 0\}$  und  $b$  im Innern des unteren Halbraums

$H^- = \{y \mid \bar{u}y \leq 0\}$  von  $H$  enthalten ist. Man bezeichnet die Lemmata 1.1 und 1.8 daher auch als die Theoreme von der trennenden Hyperebene. Ähnlich behauptet das Lemma 1.3 die Existenz einer trennenden Hyperebene  $H$  zwischen dem nicht-negativen Orthanten und dem von der Matrix  $\begin{vmatrix} -A \\ -B \end{vmatrix}$  vom Scheitelpunkt  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  aus aufgespannten versetzten polyedrischen konvexen Kegel derart, daß die Normale  $(u^0, v^0)$  zu  $H = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mid u^0 y + v^0 z = 0 \right\}$  bezüglich  $u^0$  in den nichtnegativen Orthanten und bezüglich  $v^0$  ins Innere des nichtnegativen Orthanten weist.

Die Lemmata 1.1 und 1.8 lassen sich noch anders deuten. Ist  $K$  ein konvexer Kegel, so definiert man als den zugehörigen dualen oder negativ polaren Kegel die Menge

$$(1-42) \quad K^* = \left\{ u \mid uy \leq 0 \text{ für alle } y \in K \right\}.$$

$K^*$  stellt ebenfalls einen konvexen Kegel dar, und ein einfaches Stetigkeitsargument lehrt, daß  $\langle K \rangle^* = K^*$  ist. Das Lemma 1.8 besagt also, daß, wenn der abgeschlossene konvexe Kegel  $\langle K \rangle$  nicht mit dem ganzen Raum  $E_m$  zusammenfällt, der duale Kegel  $K^* = \langle K \rangle^*$  stets einen von Null verschiedenen Punkt  $\bar{u}$  enthält. Das Lemma 1.1 vermittelt die gleiche Aussage für polyedrische konvexe Kegel. Dies ist die fundamentale Eigenschaft konvexer Kegel, auf der die Dualitätstheorie der mathematischen Programmplanung beruht.

Wegen der Darstellung wichtiger Beziehungen zwischen dualen Kegeln sowie der Beweistechnik für Separationstheoreme wird auf Karlin<sup>15/</sup> verwiesen.

Lemma 1.9:  $K$  sei ein nichtleerer konvexer Kegel in  $E_m$ , der keinen inneren Punkt des nichtnegativen Orthanten  $E_m^+$  enthalte. Dann existiert ein Vektor  $\bar{v} \geq 0$ , so daß  $\bar{v}y \leq 0$  für alle  $y \in K$  gilt. Ist  $\bar{y}$  ein maximaler bzw.  $S$ -maximaler Punkt von  $K$ , so läßt sich  $\bar{v}$  überdies so bestimmen, daß  $\bar{v}\bar{y} = 0$  gilt.

### Beweis.

Annahmegemäß enthält auch die abgeschlossene Hülle  $\langle C \rangle$  des konvexen Kegels

$$(1-43) \quad C = \{ y-z \mid y \in K, z \in E_m^+ \}$$

keinen inneren Punkt von  $E_m^+$ . Es gibt also Punkte von  $E_m$ , die nicht in  $\langle C \rangle$  enthalten sind. Ist  $b \notin \langle C \rangle$ , so existiert nach Lemma 1.8 ein  $\bar{u} \neq 0$ , so daß  $\bar{u}(y-z) \geq 0$  für alle  $y \in K$  und alle  $z \in E_m^+$  und zugleich  $\bar{u}b < 0$  gilt. Daraus folgt  $\bar{u} \leq 0$ . Setzt man  $\bar{v} = -\bar{u}$  und  $z = 0 \in E_m^+$ , so gilt  $\bar{v}y \leq 0$  für alle  $y \in K$  und  $\bar{v}b > 0$ , wobei  $\bar{v} \geq 0$  ist.

$\bar{y}$  sei ein Punkt von  $K$ , für den die Ungleichung  $y \geq \bar{y}$  durch kein  $y \in K$  erfüllbar ist. Dann gilt  $\bar{y} \in C$  und  $(y-z) \geq \bar{y}$  für kein  $(y-z) \in C$ . Man wähle eine Folge  $\{\epsilon_k\}$  mit  $\epsilon_k > 0$  und  $\lim \epsilon_k = 0$ . Setzt man  $b^k = \bar{y} + \epsilon_k e$ , so gilt  $b^k \notin \langle C \rangle$ . Nach dem ersten Teil des Beweises existiert ein  $v^k \geq 0$  mit  $v^k y \leq 0$  für alle  $y \in K$  und  $v^k b^k > 0$ . Man setze  $\bar{v}^k = v^k / |v^k|$ . Die Folge  $\{\bar{v}^k\}$  ist beschränkt und enthält damit eine konvergente Teilfolge, etwa  $\{\bar{v}^\lambda\}$  mit  $\lim \bar{v}^\lambda = \bar{v} \geq 0$ . <sup>16/</sup> Es ist dann

$$(1-44) \quad \lim \bar{v}^\lambda y = \bar{v}y \leq 0 \quad \text{für alle } y \in K$$

und

$$(1-45) \quad \lim \bar{v}^\lambda b^\lambda = \bar{v}y \geq 0,$$

woraus  $\bar{v}y = 0$  resultiert, q.e.d.

1.5.3 Es ist jetzt leicht, das allgemeine Effizienzkriterium für den Produktionsraum  $Y(S)$  herzuleiten. An die Stelle des Satzes 1.1 tritt folgender

Satz 1.7: (a) Notwendig für die Effizienz eines Produktionsergebnisses  $\bar{y} \in Y(S)$  auf der Menge  $Y(S)$  ist die Existenz eines Vektors von Schattenpreisen  $\bar{p} \geq 0$  mit der Eigenschaft, daß

$$(1-46) \quad \bar{p}a \leq 0 \quad \text{für alle } a \in S$$

und

$$(1-47) \quad \bar{p} \bar{y} = 0$$

gilt.

(b) Ist der Preisvektor  $\bar{p}$  streng positiv,  $\bar{p} > 0$ , so ist die soeben genannte Bedingung auch hinreichend für die Effizienz von  $\bar{y}$ .

#### Beweis.

(a) Notwendigkeit: Der Punkt  $\bar{y} \in Y(S)$  sei effizient, also maximal auf  $Y(S)$ .  $Y(S)$  ist ein nichtleerer konvexer Kegel.  $Y(S)$  enthält zudem keinen inneren Punkt von  $E_m^+$ . Gäbe es nämlich ein  $y^0 \in Y(S)$  mit  $y^0 > 0$ , so wäre für hinreichend großes  $\lambda \geq 0$  die Ungleichung  $\lambda y^0 \geq \bar{y}$  im Widerspruch zur Effizienz von  $\bar{y}$  erfüllbar. Damit ist das Lemma 1.9 mit  $\bar{p} = \bar{v}$  unmittelbar anwendbar. Aus  $S \subseteq Y(S)$  folgt  $\bar{p} a \leq 0$  für alle  $a \in S$ .

(b) Hinlänglichkeit: Ist das im Satz 1.7 genannte Kriterium für ein  $\bar{y} \in Y(S)$  mit einem  $\bar{p} > 0$  erfüllt, so gilt für jedes  $y \in Y(S)$  auf Grund der Darstellung  $y = \sum_j a^j x_j$  mit  $a^j \in S$  und  $x_j \geq 0$

$$(1-48) \quad \bar{p} y = \bar{p} \sum_j a^j x_j = \sum_j (\bar{p} a^j) x_j \leq 0,$$

also auch  $\bar{p} y \leq \bar{p} \bar{y}$ . Wäre nun ein  $y' \geq \bar{y}$  in  $Y(S)$  enthalten, so gälte  $\bar{p} y' > \bar{p} \bar{y}$  im Widerspruch zur soeben hergeleiteten Ungleichung. Also ist  $\bar{y}$  im Raume  $Y(S)$  effizient, q.e.d.

1.5.4 Hervorzuheben ist das Auseinanderklaffen der notwendigen und der hinreichenden Bedingung für die Effizienz eines Produktionsergebnisses  $\bar{y}$  in  $Y(S)$ . Wir erläutern anhand zweier kaum als atypisch zu bezeichnenden Beispiele, daß der Unterschied zwischen den beiden Bedingungen ohne zusätzliche Annahmen über die Technologie  $S$  nicht behebbar ist.

Die notwendige Bedingung ist nicht hinreichend; ein Produktionsergebnis  $\bar{y}$ , dem ein halbpositiver Preisvektor  $\bar{p}$  zugeordnet ist, braucht nicht effizient zu sein. Der Punkt

$\bar{y} = \frac{1}{2}(a^1 + a^2) = (1, 2, -1)$  aus dem Produktionsraum  $Y(A)$  mit der technologischen Matrix

$$(1-49) \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a^1 & a^2 & a^3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} \end{array}$$

ist gewiß nicht effizient im Sinne der bisherigen Definition 1.1, obwohl der halbpositive Preisvektor  $\bar{p} = (1, 0, 1)$  zusammen mit  $\bar{y}$  die Bedingungen (1-46), (1-47) erfüllt.

Die hinreichende Bedingung ist nicht notwendig; ein Produktionsergebnis  $\bar{y}$ , welchem ein halbpositiver Preisvektor  $\bar{p}$  (und nur ein solcher) zugeordnet ist, kann aber auch effizient sein. Um dies zu erkennen, wähle man die Technologie

$$(1-50) \quad S = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid 1 \leq a_2 \leq 3; \quad a_3 = \sqrt{1 - (a_2 - 2)^2} - 2 \right\}.$$

Der Produktionsraum  $Y(S)$  ist dann in der parametrischen Form

$$(1-51) \quad Y(S) = \left\{ y \mid y = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \alpha + a(1 - \alpha), \lambda \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1, a \in S \right\}$$

darstellbar. Dem Punkte  $\bar{y} = (1, 2, -1)$  aus  $S \subseteq Y(S)$  ist der den Bedingungen (1-46), (1-47) genügende Preisvektor  $\bar{p} = (1, 0, 1)$  zugeordnet. Jedoch gibt es keinen Vektor  $p^* > 0$ , der zusammen mit  $\bar{y}$  den Bedingungen (1-46), (1-47) genügt. Für ein derartiges  $p^*$  müßte

$$(1-52) \quad p_1^* + 2p_2^* - p_3^* = 0$$

und für alle  $\delta > 0$  und entsprechende  $\theta$  mit  $0 < \theta < 1$  auch

$$(1-53) \quad p_1^* + p_2^*(2 + \delta) - p_3^* \left( 1 + \frac{\theta \delta}{\sqrt{1 - \delta^2 \theta^2}} \delta \right) \leq 0$$

gelten, woraus in der Ungleichung

$$(1-54) \quad p_2^* \leq p_3^* \frac{\theta \delta}{\sqrt{1-\delta^2\theta^2}}$$

für hinreichend kleines  $\delta_0 > 0$  bei Gültigkeit der Ungleichung  $p_2^* > 0$  ein Widerspruch resultieren würde. Trotzdem ist der Punkt  $\bar{y}$  effizient. Angenommen, es gäbe ein  $y' \in Y(S)$  mit  $y' \geq y$ . Wegen (1-51) also

$$(1-55) \quad y' = \lambda' \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \alpha' + \begin{pmatrix} 1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} (1-\alpha') \right] \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt  $\lambda' \geq 1$ . Nun gilt für alle  $a \in S$  mit  $a \neq \bar{y}$  die Ungleichung  $a_3 < \bar{y}_3 = -1$ . Daher kann höchstens  $\alpha' = 0$  sein. Die Ungleichung

$$(1-56) \quad \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda' \geq 1, a' \in S$$

ist aber, wie leicht feststellbar, widersprüchlich, der Punkt  $\bar{y}$  mithin effizient.

Man prüft leicht nach, daß die Bedingungen des Satzes 1.7(a) zugleich notwendig und hinreichend für die Effizienz sind, wenn man diesem Begriff das Konzept der S-Maximalität gemäß Definition 1.2 zugrundelegt. Diese Tatsache ist der hauptsächliche Grund für die Einführung der S-Maximalität, deren Bedeutung für ökonomische Fragestellungen gleichwohl gering ist.

1.5.5 Das allgemeine lineare Wachstumsmodell. Die Punkte  $y \in Y$  des Produktionsraumes  $Y$  werden in dieser Arbeit durchweg im Sinne des Nettoprinzips (vgl. S. 12) verwendet. An dieser Stelle sei jedoch auf eine weite und gut erforschte Klasse von linearen Produktionsmodellen hingewiesen, die auf dem Bruttoprinzip beruhen und in der Wirtschaftstheorie unter dem Namen "lineare Modelle des balancierten Wachstums" bekannt sind. Zwei wichtige Spezialfälle aus dieser Klasse von Modellen sind die von Neumannschen und die expandierenden Leontief-schen Modelle.

Beim Bruttoprinzip werden die Vektoren  $y \in Y$  in eine Brutto-Outputkomponente  $y_{\text{out}} \geq 0$  und eine Brutto-Inputkomponente  $y_{\text{in}} \geq 0$  zerlegt, also  $y = y_{\text{out}} - y_{\text{in}}$ . Als neuen (Brutto-) Produktionsraum betrachtet man die Menge

$$(1-57) \quad Z = \left\{ z \mid z = \begin{pmatrix} y_{\text{out}} \\ y_{\text{in}} \end{pmatrix} \right\},$$

von der man gewöhnlich voraussetzt, daß sie einen nichtleeren, abgeschlossenen konvexen Kegel in  $E_{2m}^+$  darstellt, mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß aus  $y_{\text{in}} = 0$  stets  $y_{\text{out}} = 0$  folgt.

Das Problem der effizienten Produktion bietet sich hier in der einfachsten Gestalt als die Aufgabe dar, einen Punkt  $\bar{z} = (\bar{y}_{\text{out}}, \bar{y}_{\text{in}})$  aus der Menge  $Z$  derart zu bestimmen, daß der Brutto-Output bezogen auf den Brutto-Input eine möglichst große technologische Wachstumsrate  $\bar{\alpha}$  besitzt. Als technologische Wachstumsrate definiert man  $\alpha = \alpha(y_{\text{out}}, y_{\text{in}}) = \max \{ \lambda \mid y_{\text{out}} \geq \lambda y_{\text{in}} \}$ , falls  $y_{\text{in}} \geq 0$ , und  $\alpha = \alpha(y_{\text{out}}, y_{\text{in}}) = 0$ , falls  $y_{\text{in}} = 0$ . Die Funktion  $\alpha(y_{\text{out}}, y_{\text{in}})$  ist also stets nichtnegativ. Es sind nun diejenigen Punkte  $(\bar{y}_{\text{out}}, \bar{y}_{\text{in}})$  aus  $Z$  zu charakterisieren, für welche  $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{y}_{\text{out}}, \bar{y}_{\text{in}})$  maximal auf  $Z$  ist, d.h. für die

$$(1-58) \quad \bar{\alpha} \geq \alpha(y_{\text{out}}, y_{\text{in}}) \quad \text{für alle } (y_{\text{out}}, y_{\text{in}}) \in Z$$

gilt, sofern solche Punkte balancierten Wachstums, wie sie heißen, überhaupt vorhanden sind.

Darüber gilt folgender

Satz 1.8: Ist  $(\bar{y}_{\text{out}}, \bar{y}_{\text{in}}) \in Z$  ein Vektor, so daß  $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{y}_{\text{out}}, \bar{y}_{\text{in}})$  die maximale Wachstumsrate auf  $Z$  darstellt, so existiert ein System von Schattenpreisen  $\bar{p} \geq 0$ , für das

$$(1-59) \quad \bar{p} y_{\text{out}} \leq \bar{\alpha} \bar{p} y_{\text{in}} \quad \text{für alle } (y_{\text{out}}, y_{\text{in}}) \in Z$$

und

$$(1-60) \quad \bar{p} \bar{y}_{\text{out}} = \bar{\alpha} \bar{p} \bar{y}_{\text{in}}$$

gilt. <sup>17/</sup> Ist  $\bar{p} > 0$ , so sind die Bedingungen (1-59), (1-60) auch hinreichend dafür, daß  $\bar{\alpha}$  die maximale Wachstumsrate auf  $Z$  und  $(\bar{y}_{out}, \bar{y}_{in}) \in Z$  einen Punkt balancierten Wachstums darstellt.

Beweis.

Die Menge  $K = \left\{ y_{out} - \bar{\alpha} y_{in} \mid \begin{pmatrix} y_{out} \\ y_{in} \end{pmatrix} \in Z \right\}$  ist nach den Annahmen über  $Z$  ein nichtleerer konvexer Kegel in  $E_m$ , der nach Definition von  $\bar{\alpha}$  keinen inneren Punkt des nichtnegativen Orthanten  $E_m^+$  enthält. Der Punkt  $(\bar{y}_{out} - \bar{\alpha} \bar{y}_{in})$  ist S-maximal auf  $K$ . Nach dem Lemma 1.9 existiert daher ein  $\bar{p} \geq 0$ , welches die Bedingungen (1-59), (1-60) erfüllt.

Sind für ein  $(\bar{y}_{out}, \bar{y}_{in}) \in Z$  die Bedingungen (1-59), (1-60) mit einem  $\bar{p} > 0$  erfüllt, so muß die Ungleichung (1-58) bestehen. Gäbe es nämlich ein  $(y_{out}^*, y_{in}^*) \in Z$  mit  $\alpha^* = \alpha(y_{out}^*, y_{in}^*) > \bar{\alpha}$ , so wäre  $\alpha^* > 0$  und

$$(1-61) \quad y_{out}^* \geq \bar{\alpha} y_{in}^* + (\alpha^* - \bar{\alpha}) y_{in}^*,$$

woraus wegen  $y_{in}^* \geq 0$  und  $\bar{p} > 0$  die Beziehung  $\bar{p} y_{out}^* > \bar{\alpha} \bar{p} y_{in}^*$  im Widerspruch zu (1-59) folgt, q.e.d.

Nach diesem Satz ist der Schattenwert des Outputs niemals größer als der mit der Wachstumsrate multiplizierte Schattenwert des Inputs, sofern  $\bar{\alpha}$  die maximale Wachstumsrate darstellt. Dieses Theorem legt die duale Deutung der technologischen Wachstumsrate  $\bar{\alpha}$  als eines Verzinsungsfaktors des Wertes der Inputs nahe.

Wegen der Einzelheiten der Theorie der Wachstumsmodelle wird auf Arbeiten von Karlin <sup>18/</sup> und Gale <sup>19/</sup> verwiesen. Man vergleiche insbesondere das Effizienztheorem bei Karlin <sup>20/</sup> mit unserem Satz 1.7.

## Kapitel 2

### Optimaler Faktoreinsatz im linearen Produktions-

#### modell bei gegebener Endnachfrage

#### 2.1 Problemstellung und Definitionen

2.1.1 Im ersten Kapitel wurde das Problem der effizienten Produktion unter der Annahme behandelt, daß das Faktorangebot keinerlei Beschränkungen unterliegt und daß sämtliche  $m$  primären und finalen Güter begehrt sind. Im jetzigen Kapitel soll die Annahme unbeschränkten Faktorangebots, also die im wesentlichen langfristige Betrachtungsweise, beibehalten werden, jedoch soll die mengenmäßige Nachfrage  $z_F^0 \geq 0$  nach den Endprodukten  $y_F$  extern gegeben, etwa autonom durch eine Planstelle gesetzt sein. Diese Nachfrage sei bezüglich etwaiger Markt- oder Schattenpreise der finalen Güter völlig unelastisch. Im gegenwärtigen Produktionsmodell wird also die Menge der technisch durchführbaren Produktionsprozesse durch eine ökonomische Nebenbedingung eingeschränkt.

Das Problem der effizienten Produktion und optimalen Faktorallokation soll jetzt in der Ermittlung einer solchen Kombination von Prozeßgraden  $\bar{x} \geq 0$  bestehen, daß der Nettoausstoß  $\bar{y}_F = A_F \bar{x}$  an Endprodukten die autonome Nachfrage  $z_F^0 \geq 0$  mindestens deckt, die Verminderung auch nur einer Faktoreinsatzmenge ohne Erhöhung des Inputs mindestens eines anderen Faktors indes den Ausstoß an Endprodukten derart verändert, daß für mindestens ein Endprodukt die autonome Nachfrage  $z_F^0$  nicht mehr vollständig befriedigt wird.

2.1.2 Der Produktionsraum des gegenwärtigen Modells lautet:

$$(2-1) \quad Y = Y(A, z_F^0) = \left\{ y \mid y = Ax, \quad x \in X \right\},$$

worin

$$(2-2) \quad X = X(A, z_F^0) = \left\{ x \mid A_F x \geq z_F^0, x \in E_n^+ \right\}$$

gesetzt ist. Die orthogonale Projektion von  $Y$  auf den euklidischen Raum  $E_S$  der primären Güter wird mit

$$(2-3) \quad Y_P = \left\{ y_P \mid y_P = A_P x, x \in X \right\}$$

bezeichnet. Das Problem der effizienten Produktion und des optimalen Faktoreinsatzes läßt sich so umreißen, daß die im Sinne der Definition 1.1 maximalen Punkte der Menge  $Y_P$  zu ermitteln sind.

Definition 2.1: Der Vektor  $\bar{y} \in Y(A, z_F^0)$  heißt effizient, wenn es kein  $y^* \in Y(A, z_F^0)$  mit der Eigenschaft  $y_P^* \geq \bar{y}_P$  gibt.

Man beachtet, daß wegen der Negativität von Inputs das soeben formulierte Vektor-Maximum-Problem auf die Minimierung des mengenmäßigen Einsatzes an Produktionsfaktoren bei gegebener autonomer Nachfrage hinausläuft.

## 2.2 Das lineare Vektor-Maximum-Problem und verwandte Extremalprobleme

### 2.2.1 Man definiere die Mengen

$$(2-4) \quad D = \left\{ d \mid d = Cx, x \in X \right\},$$

worin

$$(2-5) \quad X = X(A, b) = \left\{ x \mid Ax \leq b, x \in E_x^+ \right\}$$

gesetzt ist, und

$$(2-6) \quad H = \left\{ h \mid ub - vh \leq 0, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R \right\},$$

worin

$$(2-7) \quad R = R(A, C | E_x) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid uA - vC \geq 0, u \geq 0, v > 0 \right\}$$

gesetzt ist. Dabei bedeuten  $A$  und  $C$  Matrizen beliebiger (zueinander passender) endlicher Ordnung und  $b, x, u, v, d$  Vektoren passender Dimension.

Im folgenden werden drei miteinander verknüpfte Extremalprobleme formuliert:

Problem I-L (Lineares Vektor-Maximum-Problem): Ermittle die nach Definition 1.1 maximalen Elemente  $\bar{d}$  auf der Menge D.

Ein Vektor  $\bar{x} \in X$  heißt eine Lösung des Problems I-L, wenn  $\bar{d} = C\bar{x}$  maximal auf D ist.

Problem II-L (Lineares Vektor-Minimum-Problem): Ermittle die im Sinne der Definition 1.1 minimalen Elemente  $\bar{h}$  auf der Menge H.

Ein Vektorpaar  $(\bar{u}, \bar{v}) \in R$  heißt eine Lösung des Problems II-L, wenn ihm ein auf H minimales  $\bar{h}$  zugeordnet werden kann.

Ist C eine einzeilige Matrix, so ergeben sich aus I-L und II-L bei Normierung  $v \equiv 1$  die beiden dualen Probleme der skalaren linearen Programmierung.

Problem III-L (Lineares Sattelwertproblem): Ermittle ein Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{x} \in E_x^+$ ,  $\bar{u} \in E_u^+$  und  $\bar{v} > 0$  derart, daß die sog. Lagrangesche Form  $\phi(x, u, v) = vCx + u(b - Ax)$  für alle  $x \in E_x^+$  und alle  $u \in E_u^+$  den Ungleichungen

$$(2-8) \quad \phi(x, \bar{u}, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, u, \bar{v})$$

genügt.

Wie im Satz 5.1 gezeigt wird, bedeuten die Ungleichungen (2-8), daß die Funktion  $\phi(x, u, \bar{v})$  in  $(\bar{x}, \bar{u})$  einen Sattelwert auf der kartesischen Produktmenge  $E_x^+ \times E_u^+$  annimmt.

2.2.2 Über den Zusammenhang zwischen dem Problem I-L und dem Problem II-L gibt folgender Dualitätssatz der linearen Programmierung Aufschluß:

Satz 2.1: (a) Ein Element  $\bar{d}$  von D ist dann und nur dann maximal auf D, wenn es in H enthalten ist. (b) Ein Element  $\bar{h}$  von H ist dann und nur dann minimal auf H, wenn es in D enthalten ist.

Beweis.

Notwendigkeit:

- (a) Der Vektor  $\bar{d} = C\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in X(A,b)$ , sei maximal auf D. Die Ungleichungen

$$(2-9) \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad -Cx \leq -\bar{d}, \quad x \geq 0$$

besitzen die gemeinsame Lösung  $\bar{x}$ . Dagegen weisen die Ungleichungen

$$(2-10) \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad -Cx \leq -\bar{d}, \quad x \geq 0$$

wegen der Maximalität von  $\bar{d}$  keine gemeinsame Lösung auf. Nach dem Lemma 1.3 existiert daher ein Vektorpaar  $(\bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{u} \geq 0$ ,  $\bar{v} > 0$ , so daß

$$(2-11) \quad -(\bar{u}A - \bar{v}C)x + (\bar{u}b - \bar{v}\bar{d}) \leq 0 \quad \text{für alle } x \geq 0$$

gilt. Hieraus erschließt man das Bestehen der Ungleichung  $\bar{u}A - \bar{v}C \geq 0$ , d.h.  $(\bar{u}, \bar{v}) \in R(A, C|E_x)$ , und für  $x = 0$  ergibt sich  $\bar{u}b - \bar{v}\bar{d} \leq 0$ . Also ist  $\bar{d}$  Element von H.

- (b) Der Vektor  $\bar{h}$  sei ein minimales Element von H. Es gibt dann ein Vektorpaar  $(\bar{u}, \bar{v}) \in R(A, C|E_x)$  mit  $\bar{u}b - \bar{v}\bar{h} \leq 0$ . Die Ungleichungen

$$(2-12) \quad zC - uA \leq -\bar{v}C, \quad u \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{und} \quad -z\bar{h} + ub \leq \bar{v}\bar{h},$$

$$u \geq 0, \quad z \geq 0$$

besitzen dann die gemeinsame Lösung  $u = \bar{u}$ ,  $z = 0$ , während die Ungleichungen

$$(2-13) \quad zC - uA \leq -\bar{v}C, \quad u \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{und} \quad -z\bar{h} + ub < \bar{v}\bar{h},$$

$$u \geq 0, \quad z \geq 0$$

wegen der Minimalität von  $\bar{h}$  keine gemeinsame Lösung aufweisen können. Nach Lemma 1.3 existiert daher ein  $\bar{x} \geq 0$  mit der Eigenschaft, daß

$$(2-14) \quad (-vC - zC + uA)\bar{x} + \bar{v}h + z\bar{h} - ub \leq 0$$

bzw.

$$(2-15) \quad -u(b - A\bar{x}) + z(\bar{h} - C\bar{x}) + \bar{v}(\bar{h} - C\bar{x}) \leq 0 \text{ für alle } u \geq 0, z \geq 0$$

gilt. Hieraus folgt  $b - A\bar{x} \geq 0$ , d.h.  $\bar{x} \in X(A, b)$ , und  $\bar{h} - C\bar{x} \leq 0$ . Wäre nun  $\bar{h} \neq C\bar{x}$ , so müßte  $\bar{h} \leq C\bar{x}$  sein. Hieraus würde unter Benutzung der in (2-6), (2-7) auftretenden Ungleichungen und der soeben nachgewiesenen Ungleichung in (2-5) mit den Ungleichungen

$$(2-16) \quad \bar{v}h < \bar{v}C\bar{x} \leq \bar{u}A\bar{x} \leq \bar{u}b \leq \bar{v}h$$

ein Widerspruch eintreten. Daher muß  $\bar{h} = C\bar{x}$  und  $\bar{h} \in D$  sein.

Hinlänglichkeits:

Daß die Bedingungen in (a) und in (b) hinlänglich sind, ergibt sich aus der Tatsache, daß für alle  $d \in D$  und alle  $h \in H$  die Beziehung  $d \neq h$  gilt. Ist nämlich  $d^0 \in D$  mit  $x^0 \in X$  und  $h^* \in H$  mit  $(u^*, v^*) \in R$ , so würde aus  $d^0 \geq h^*$  die widersprüchliche Ungleichungskette

$$(2-17) \quad v^*d^0 > v^*h^* \geq u^*b \geq u^*Ax^0 \geq v^*Cx^0 = v^*d^0$$

folgen. Die Punkte, die sowohl in  $D$  als auch in  $H$  enthalten sind, stellen also die Vektor-Maxima für Problem I-L und die Vektor-Minima für Problem II-L dar, q.e.d.

Der Gedanke, den Beweis des Dualitätssatzes auf dem Lemma 1.3 zu errichten, stammt von Karlin 21/. Unser Beweis ist gegenüber dem von Karlin strikt algebraisiert (vgl. die Bemerkung vor Lemma 1.3).

2.2.3 Der Satz 2.1 kann zum Beweis einer Existenzbedingung für Lösungen des Problems I-L und damit auch des Problems II-L herangezogen werden.

Satz 2.2 (Gale/Kuhn/Tucker): Existiert ein Element  $d^0$  aus  $D$  und ein Element  $h^*$  aus  $H$ , so besitzt das Problem I-L eine Lösung.

Beweis. <sup>22/</sup>

Es sei  $(u^*, v^*) \in R$  das zu  $h^*$  gehörige Vektorpaar. Es genügt zu zeigen, daß die Ungleichungen

$$(2-18) \quad Ax \leq b, \quad uA \geq v^*C \quad \text{und} \quad ub - v^*Cx \leq 0$$

eine gemeinsame nichtnegative Lösung  $(\bar{x}, \bar{u}) \geq 0$  besitzen.

Nach Satz 2.1 ist der Vektor  $\bar{d} = C\bar{x}$  dann maximal auf  $D$  und minimal auf  $H$ .

Hätten die Ungleichungen (2-18) keine nichtnegative Lösung, so besäße nach dem Lemma 1.2 das System

$$(2-19) \quad wA \geq \delta v^*C, \quad Az \leq \delta b, \quad wb - v^*Cz < 0$$

eine nichtnegative Lösung  $(w^0, z^0, \delta^0)$ . Nun muß  $\delta^0 = 0$  sein, denn für  $\delta^0 > 0$  würde in

$$(2-20) \quad w^0Az^0 \leq \delta^0 w^0b < \delta^0 v^*Cz^0 \leq w^0Az^0$$

ein Widerspruch entstehen. Ist jetzt  $w^0b < 0$ , so folgt aus  $w^0A \geq 0$  nach dem Lemma 1.2, daß kein  $x^0 \geq 0$  die Ungleichung  $Ax \leq b$  befriedigt. Ist aber  $w^0b \geq 0$ , so folgt aus  $v^*Cz^0 > 0$  und  $Az^0 \leq 0$ , daß die Ungleichung  $uA - v^*C \geq 0$  keine Lösung  $u^* \geq 0$  aufweist. Beides widerspricht der Hypothese des Satzes, q.e.d.

2.2.4 Mit den oben angewandten Verfahren läßt sich ferner das folgende Sattelpunkttheorem unschwer beweisen:

Satz 2.3: Notwendig und hinreichend, daß  $\bar{x}$  eine Lösung des Problems I-L darstellt, ist die Existenz von Vektoren  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} > 0$ , so daß die Lagrangesche Form  $\phi(x, u, \bar{v})$  im Punkte  $(\bar{x}, \bar{u})$  einen Sattelpunkt auf  $E_x^+ \times E_u^+$  annimmt.

Nützlich ist die Bemerkung, daß in den Sätzen 2.1 und 2.3 die Vektoren  $(\bar{u}, \bar{v})$  übereinstimmend gewählt werden können. Für spätere Verweisungen geben wir noch das

Lemma 2.1: Für die gemeinsamen Lösungen  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  der Probleme I-L und II-L bestehen die Gleichungen

$$(2-21) \quad \bar{u}(b - A\bar{x}) = 0,$$

$$(2-22) \quad \bar{u}\bar{b} - \bar{v}\bar{h} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{u}A\bar{x} - \bar{v}C\bar{x} = 0.$$

In der Tat gilt

$$(2-23) \quad \bar{v}\bar{h} \geq \bar{u}\bar{b} \geq \bar{u}A\bar{x} \geq \bar{v}C\bar{x} = \bar{v}\bar{d} = \bar{v}\bar{h},$$

q.e.d.

## 2.3 Effizienzkriterien und Existenzsatz

2.3.1 Die in 2.2 dargestellte Theorie der linearen Vektor-Maxima führt in sehr einfacher Weise zur Beschreibung effizienter Produktionsergebnisse  $\bar{y} \in Y(A, z_F^0)$ . Zu gegebenem  $\bar{y} \in Y$  läßt sich eine Permutation der Komponenten von  $y \in Y$  finden, so daß  $y$  die Darstellung  $y = (y_{F=}, y_{F>}, y_P)$  besitzt, worin  $y_{F=}$  und  $y_{F>}$  so bestimmt sind, daß für die entsprechende Zerlegung  $z_F^0 = (z_{F=}^0, z_{F>}^0)$  die Bedingungen  $\bar{y}_{F=} = z_{F=}^0$  und  $\bar{y}_{F>} > z_{F>}^0$  gelten. Entsprechend der Zerlegung von  $y$  kann der Vektor  $p = (p_{F=}, p_{F>}, p_P)$  aufgeteilt werden.

Zum Mengenproblem der effizienten Produktion gehört - wie im Kapitel 1 - ein duales Preisproblem, und zwar unabhängig davon, ob für Endprodukte oder Produktionsfaktoren Märkte existieren oder nicht.

Satz 2.4 (Allgemeines Effizienzkriterium): Ein Vektor  $\bar{y} \in Y(A, z_F^0)$  ist genau dann effizient, wenn es einen Vektor von Schattenpreisen  $\bar{p}$  gibt, der die Bedingungen

$$(2-24) \quad \bar{p}_{F=} \geq 0, \quad \bar{p}_{F>} = 0, \quad \bar{p}_P > 0$$

und

$$(2-25) \quad \bar{p}A \leq 0 \quad \text{und} \quad \bar{p}\bar{y} = 0$$

erfüllt.

### Beweis.

Das dem Problem I-L, die Vektor-Maxima  $\bar{y}_P$  auf  $Y_P$  zu bestimmen, zugeordnete Problem II-L ist durch die Bedingungen

$$(2-26) \quad uz_F^0 + vA_P x \geq 0,$$

$$(2-27) \quad uA_F + vA_P \leq 0$$

gekennzeichnet. Die Existenz von Vektoren  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} > 0$ , die mit  $\bar{x} \in X$  zusammen nach Satz 2.1 die Ungleichungen (2-26) und (2-27) und nach dem Lemma 2.1 die Gleichungen

$$(2-28) \quad \bar{u}z_F^0 + \bar{v}A_P \bar{x} = 0,$$

$$(2-29) \quad \bar{u}(A_F \bar{x} - z_F^0) = 0,$$

$$\bar{u}A_F \bar{x} + \bar{v}A_P \bar{x} = 0$$

befriedigen, ist notwendig und hinreichend für die Effizienz von  $\bar{y} = A\bar{x}$ . Man verifiziert unmittelbar, daß die Bedingungen (2-29), (2-27), (2-28) und (2-24), (2-25) für  $\bar{u} = \bar{p}_F$ ,  $\bar{v} = \bar{p}_P$  äquivalent sind, q.e.d.

Bemerkung. Die Bedingungen (2-25) können auch, wie beim Satz 1.2, in der gleichwertigen Form

$$(2-30) \quad \bar{p} A^{(1)} \leq 0, \quad \bar{p} A^{(2)} = 0$$

niedergeschrieben werden, sofern  $\bar{y} \neq 0$  ist. Die Bemerkung über die Effizienz ganzer Basisprozesse überträgt sich jedoch nicht auf das gegenwärtige Modell.

Wie man aus (2-25) ersieht, ist der Schattenpreisvektor  $\bar{p}$  gerade so beschaffen, daß der Wert der Endprodukte  $\bar{p}_F \bar{y}_F$  gleich dem Wert der eingesetzten Faktormengen  $-\bar{p}_P \bar{y}_P$  ist. Der Bruttoerlös der Produktion wird in voller Höhe auf die Faktoren verteilt.

2.3.2 Effiziente Produktion ist weiterhin charakterisiert durch die Erscheinung, daß der Wert der eingesetzten Faktormengen bei passender Wahl der Schattenpreise  $\bar{p}_P$  (die man sich

z.B. durch die Nebenbedingung eines gegebenen Preisniveaus normiert denken kann) im effizienten Punkt  $\bar{y}$  ein Minimum auf der Menge  $Y_P$  aller zulässigen Faktormengenkombinationen annimmt. Diese Tatsache bildet ein zweites Kriterium für die Effizienz. Inwieweit ökonomische Anreize und Motive ("incentives") im Wirtschaftsprozess auf einen Zustand hinwirken, bei dem der Wert der Faktormengen ein Minimum bezüglich der Menge aller möglichen Produktionszustände des Modells annimmt, ist umstritten. 23/ Die Antwort hängt maßgeblich von der jeweiligen institutionellen Deutung des Produktionsmodells ab.

Lemma 2.2: Erreicht die Linearform  $L(z) = p^*z$  mit  $p^* > 0$  im Punkte  $\bar{z} \in Z$  ihr Maximum auf der Punktmenge  $Z$ , so ist  $\bar{z}$  maximal auf  $Z$ .

Beweis.

Gäbe es ein  $z^* \in Z$  mit  $z^* \geq \bar{z}$ , so wäre  $p^*z^* > p^*\bar{z}$  im Widerspruch zur Annahme, daß  $L(z) \leq L(\bar{z})$  für alle  $z \in Z$  gelten soll, q.e.d.

Satz 2.5: Ein Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y(A, z_F^0)$  ist genau dann effizient, wenn die Linearform  $L(y_P) = p_P^* y_P$  für ein  $p_P^* > 0$  (man kann sich dieses  $p_P^*$  z.B. durch  $ep_P^* = 1$  normiert denken) auf der Menge  $Y_P$  im Punkte  $\bar{y}_P$  ihr Maximum annimmt.

Beweis.

Notwendigkeit. Ist  $\bar{y} \in Y$  effizient, so wird für  $p_P^*$  der nach Satz 2.4 vorhandene Vektor  $\bar{p}_P > 0$  gewählt. Für alle  $y_P \in Y_P$  gilt dann

$$(2-31) \quad \bar{p}_P y_P = \bar{p}_P A_P x \leq -\bar{p}_P A_F x \leq -\bar{p}_P z_F^0 = \bar{p}_P \bar{y}_P,$$

und  $L(y_P)$  nimmt auf  $Y_P$  das Maximum in  $\bar{y}_P$  an.

Die Hinlänglichkeit ist eine Folge des Lemmas 2.2, q.e.d.

2.3.3 Wir wenden uns jetzt der Frage zu, ob überhaupt effiziente Produktionsergebnisse existieren. Darüber gilt der

Satz 2.6: Bei Gültigkeit der Postulate L 2 und L 3\* (vgl. S. 14-15) gibt es zu jeder Endnachfrage  $z_F^0 \geq 0$  mindestens einen effizienten Vektor  $\bar{y} \in Y(A, z_F^0)$ .

Beweis.

Im Hinblick auf den Satz 2.2 genügt es zu zeigen, daß sowohl in  $D = Y_P$  als auch in der dualen Menge  $H$  Elemente enthalten sind. Da  $A_F$  produktiv ist, also ein  $x^* \geq 0$  mit  $A_F x^* > 0$  vorhanden ist, gibt es ein zulässiges  $x^0$  für das Problem I-L; man hat nur  $x^0 = \lambda_0 x^*$  mit  $\lambda_0 = \max_i (z_F^0)_i / (y_F^*)_i$  zu wählen.

(Daß jede autonome Nachfrage  $z_F^0 \geq 0$  durch Produktion befriedigt werden kann, ist bei Produktivität der Matrix  $A_F$  offenkundig; beweisbedürftig ist allein die Behauptung, daß dies in effizienter Weise geschehen kann.) Es ergibt sich aber auch, daß sich die Ungleichung (2-27) des Problems II-L mit einem  $u^0 \geq 0$  und  $v^0 > 0$  erfüllen läßt, da sonst die Ungleichung  $\left\| \begin{smallmatrix} A_F \\ A_P \end{smallmatrix} \right\| x \geq 0$  eine nichtnegative Lösung  $x$  im Widerspruch zur Annahme L 2 haben müßte. Damit ist die Existenz eines Elements  $h^0$  in  $H$  ebenfalls gesichert, q.e.d.

Die Behauptung des soeben formulierten Satzes lautet, daß jede autonome Nachfrage bei Gültigkeit von L 2 und L 3\* in effizienter Produktion mindestens gedeckt werden kann. Sie besagt nicht, daß die nachgefragte Mengenkombination  $z_F^0 \geq 0$  selber in effizienter Weise hergestellt werden kann. Besteht z.B. die Technologie aus nur einem Prozeß  $a = (0,1, 0,5, -1,0)$ , wobei  $A_F$  den ersten beiden Komponenten und  $A_P$  der letzten Komponente von  $a$  entspricht, und ist die Mengenkombination  $(z_F^0)_1 = 5$ ,  $(z_F^0)_2 = 20$  autonom nachgefragt, so lautet die diese Nachfrage befriedigende effiziente Produktionsalternative  $(\bar{y}_F)_1 = 5$ ,  $(\bar{y}_F)_2 = 25$ . Das zweite Endprodukt wird also wegen der hier vorliegenden mehrfachen Produktion im Überschuß produziert. Daß diese Produktionsalternative effizient ist, überprüft man nach dem Satz 2.4 anhand des Preisvektors  $\bar{p} = (10, 0, 1)$ . Man beachtet, daß dem im Überschuß erzeugten finalen Gut Nr. 2 der Schattenpreis 0 zuge-

rechnet, dieses Gut also als freies Gut betrachtet wird. Bei vollständiger Konkurrenz könnten die Anbieter dieses Gutes gegenüber dem autonomen Nachfrager keinen positiven Preis erzielen.

Demgegenüber ist es ein sehr bemerkenswertes Resultat, das angesichts der möglichen Kompliziertheit selbst linearer Technologien nicht ganz selbstverständlich ist, daß für eine spezielle Klasse von linearen Modellen gleichwohl bei effizienter Produktion stets  $\bar{y}_F = z_F^0$  gilt. Es ist dies die in Abschnitt 2.4 zu behandelnde Klasse von Technologien mit einfacher Produktion.

2.3.4 Es wird jetzt ein Aspekt der feineren Struktur effizienter Produktionsalternativen untersucht. Dazu wird folgender Hilfssatz benötigt:

Lemma 2.3: 24/  $A = \| a^j \|$  bezeichne eine  $m \times n$ -Matrix und  $N = \{ j \mid j=1,2,\dots,n \}$  die Menge ihrer Spaltenindizes. Existiert eine Lösung  $x^0 \geq 0$  der Gleichung  $Ax = b$ , so gibt es eine aus höchstens  $m$  Elementen bestehende Teilmenge  $M$  von  $N$  mit der Eigenschaft, daß die Gleichung

$$(2-32) \quad \sum_{j \in M} a^j z_j = b, \quad z = (z_j),$$

gleichfalls eine nichtnegative Lösung  $z^0 \geq 0$  besitzt.

Beweis. 25/

$N^\alpha$  sei die Teilmenge von  $N$ , für welche  $x_j^0 > 0$  gilt, also  $N^\alpha = \{ j \mid x_j^0 > 0, j \in N \}$ . Enthält  $N^\alpha$  etwa  $n_1$  Elemente und gilt  $n_1 \leq m$ , so setzt man  $M = N^\alpha$ , und der Beweis ist vollendet. Ist dagegen  $n_1 > m$ , so sind die  $m$ -dimensionalen Vektoren  $a^j$ ,  $j \in N^\alpha$ , linear abhängig, d.h., die Gleichung

$$(2-33) \quad \sum_{j \in N^\alpha} a^j y_j = 0, \quad y = (y_j),$$

besitzt eine von Null verschiedene Lösung  $y^0$ , die bei passender Wahl des Vorzeichens eine positive Komponente ent-

hält. Setzt man  $\lambda = \max_{j \in N^\alpha} \{ (y_j^0 / x_j^0) \}$ , etwa  $\lambda = y_{j^*}^0 / x_{j^*}^0 > 0$ ,

so ist der Vektor  $w^0 = (w_j^0)$ ,  $j \in N^\alpha$ , mit

$$(2-34) \quad w_j^0 = \frac{1}{\lambda} \left( \lambda - \frac{y_j^0}{x_j^0} \right) x_j^0 = x_j^0 - \frac{1}{\lambda} y_j^0$$

nichtnegativ, weist wegen  $w_{j^*}^0 = 0$  höchstens  $n_1 - 1$  von Null verschiedene Komponenten auf und bildet überdies wegen der aus (2-33), (2-34) resultierenden Beziehung

$$(2-35) \quad \sum_j a^j w_j^0 = \sum_j a^j x_j^0 - \frac{1}{\lambda} \sum_j a^j y_j^0 = b, \quad j \in N^\alpha,$$

eine Lösung der Gleichung  $\sum_j a^j x_j = b$ ,  $j \in N^\alpha$ . Ersetzt man in  $x^0$  die Komponenten mit Indizes  $j \in N^\alpha$  durch die entsprechenden  $w_j^0$ , so läßt sich das Beweisverfahren auf das neue  $x^0$  anwenden. Nach weniger als  $n$  Schritten muß mit dem Verfahren eine die Bedingungen des Lemmas erfüllende Teilmenge  $M$  von  $N$  gefunden worden sein, q.e.d.

Bemerkung. Das im obigen Beweis beschriebene Verfahren läßt sich solange fortsetzen, bis die  $a^j$ ,  $j \in M$ , in (2-32) linear unabhängig sind. Ist dies der Fall, so heißt  $z^0$  eine Basislösung von  $Ax = b$ .

Für das lineare Produktionsmodell dieses Kapitels läßt sich nun folgender Satz herleiten:

Satz 2.7: Existiert ein effizienter Punkt  $\bar{y} \in Y(A, z_F^0)$ , so läßt sich die Endnachfrage  $z_F^0 \geq 0$  nach den  $r$  finalen Gütern derart in effizienter Weise befriedigen, daß höchstens  $r$  Basisprozesse an der Produktion mitwirken.

Beweis.

$\bar{y} = A\bar{x}$  mit  $\bar{x} \in X$  sei im Raume  $Y(A, z_F^0)$  nichttrivial effizient. Bedient man sich nach etwaiger Umnummerierung der Prozesse der Zerlegungen  $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$  mit  $\bar{x}^{(1)} = 0$  und  $\bar{x}^{(2)} > 0$  sowie  $A = \|A^{(1)} \ A^{(2)}\|$ , so besitzt die Gleichung  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  und damit auch die Gleichung  $\bar{y}_F = A_F^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  die Lösung  $\bar{x}^{(2)} > 0$ . Anwendung

des Lemmas 2.3 auf die letzte Gleichung sichert die Existenz einer Lösung  $\bar{x}^{(2)} \geq 0$  mit höchstens  $r$  von Null verschiedenen Komponenten. Setzt man  $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$ , so erhält man in  $\bar{y} = A\bar{x} = A^{(2)}\bar{x}^{(2)}$  ein Produktionsergebnis, das wegen  $\bar{y}_F = \bar{\bar{y}}_F \geq z_F^0$  und  $\bar{x}^{(2)} \geq 0$  zulässig, d.h. in  $Y(A, z_F^0)$  gelegen ist und an dessen Erstellung höchstens  $r$  Grundprozesse mitwirken.

Nachzuweisen ist lediglich noch die Effizienz von  $\bar{y}$ . Nach dem Satz 2.4 existieren zu dem effizienten Vektor  $\bar{y}$  Schattenpreise  $\bar{p} = (\bar{p}_F, \bar{p}_P)$ , so daß

$$(2-36) \quad \bar{p}_F \geq 0, \quad \bar{p}_P = 0, \quad \bar{p}_P > 0,$$

$$(2-37) \quad \bar{p} A^{(1)} \leq 0, \quad \bar{p} A^{(2)} = 0$$

gilt. Wegen der Gleichung  $\bar{y}_F = \bar{\bar{y}}_F$  und der aus (2-37) resultierenden Gleichung

$$(2-38) \quad \bar{p} \bar{y} = \bar{p} A^{(2)} \bar{x}^{(2)} = 0$$

erfüllt  $\bar{y}$  zusammen mit  $\bar{p}$  ebenfalls das allgemeine Effizienzkriterium, q.e.d.

Der soeben bewiesene Satz besagt, daß man für das lineare Modell mit der technologischen Matrix  $A$  und der Endnachfrage  $z_F^0 \geq 0$  bei Existenz eines effizienten Punktes ein aus höchstens  $r$  Elementarprozessen bestehendes Teilmodell mit der Matrix  $A^{(2)}$  derart finden kann, daß der Raum  $Y(A^{(2)}, z_F^0)$  mindestens einen effizienten Punkt des Raumes  $Y(A, z_F^0)$  enthält. Dieses Resultat ist bemerkenswert, wenngleich die Auswahl des Teilmodells vom Gesamtmodell im allgemeinen von der vorgegebenen Endnachfrage abhängt, wie das Beispiel nach Satz 2.11 lehrt.

## 2.4 Eigenschaften des linearen Produktionsmodells bei einfacher Produktion

### 2.4.1

Eine Reihe besonders schöner Eigenschaften zeichnet endliche lineare Produktionsmodelle aus, bei denen sämtliche Güter in einfacher Produktion erzeugt werden. Die sog. Leon-

tiefschen Modelle bilden die bekanntesten Repräsentanten dieser speziellen Klasse von Produktionsmodellen.

Wir geben zunächst folgende

Definition 2.2: Liefert jeder Basisprozeß, der einen positiven Ausstoß für das Gut Nr.  $i_0$  (sei es ein Endprodukt oder ein primäres Gut) zu erzeugen gestattet, keinen positiven Ausstoß für irgendein anderes Gut, das in der technologischen Matrix  $A = ||a_{ij}||$  auftritt, so sagen wir, das Gut Nr.  $i_0$  werde in einfacher Produktion hergestellt.

Bezeichnet  $M_{i_0}$  die Menge der Indizes  $j$  derjenigen Basisprozesse von  $A$ , die einen positiven Ausstoß für das Gut Nr.  $i_0$  hervorzubringen erlauben, so ist die Produktion des Gutes Nr.  $i_0$  einfach, wenn für alle  $i \neq i_0$  und alle  $j \in M_{i_0}$  die Ungleichung  $a_{ij} \leq 0$  gilt.

Man beachtet, daß sich die Definition 2.2 auf Nettoausbringungen bezieht. Es ist vorstellbar, daß bei Anwendung des Brutto-Prinzips ein Prozeß, der in einfacher Produktion das Gut Nr.  $i_0$  erzeugt, außerdem noch ein Gut Nr.  $i \neq i_0$  produziert. Ein derartiger Prozeß müßte allerdings das Gut Nr.  $i$  als Input in nicht geringerer Menge benötigen, als er das betreffende Gut erzeugt.

Werden sämtliche in der technologischen Matrix  $A$  auftretenden Güter in einfacher Produktion erzeugt, so sprechen wir kurz von einfacher Produktion. Ist die Produktion nicht einfach, so heißt sie mehrfach.

2.4.2 Ein für das Folgende nützlicher Begriff ist der der Verkettung von Gütern.

Definition 2.3: Das Gut Nr.  $i_0$  heißt mit dem Gut Nr.  $i \neq i_0$  verkettet, wenn eine Folge von Basisprozessen  $a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_\lambda}$  existiert, so daß jeder Prozeß  $a^{j_v}$  ein Gut verzehrt, welches der Prozeß  $a^{j_{v+1}}$  ( $v = 1, 2, \dots, \lambda-1$ ) erzeugt, und der

Prozeß  $a^{j_1}$  das Gut Nr.  $i_0$  erzeugt, während der Prozeß  $a^{j_\lambda}$  das Gut Nr.  $i$  verzehrt.

Es gilt folgendes

Lemma 2.4: Gibt es einen Prozeßgradvektor  $\hat{x} \geq 0$  mit  $A_F \hat{x} \geq 0$ , etwa mit  $(A_F \hat{x})_{i_0} > 0$  für ein  $i_0 = 1, 2, \dots, r$ , so läßt sich bei Gültigkeit des Postulats L 2 das Endprodukt Nr.  $i_0$  mit einem primären Gut verkettten, und zwar derart, daß sämtliche Basisprozesse  $a^{j_v}$  der Kette beim Prozeßniveau  $\hat{x}$  mit positiver Intensität betrieben werden.

Beweis.

Man definiere, wie bisher,  $N = \{j | j = 1, 2, \dots, n\}$  und  $N^\alpha = \{j | \hat{x}_j > 0, j \in N\}$ .  $I_0$  bezeichne die Menge der Indizes der Güter, mit denen sich das Endprodukt Nr.  $i_0$  anhand von Basisprozessen  $a^{j_v}$ ,  $j_v \in N^\alpha$ , verkettten läßt. Man setze

$M_i^\alpha = M_i \cap N^\alpha$  und  $M = \bigcup_{i \in I_0} M_i^\alpha$ . Dann gilt ersichtlich

$\sum_{j \in M} a_F^j \hat{x}_j \geq A_F \hat{x} \geq 0$ . Angenommen, es ließe sich keine Verkettung des  $i_0$ -ten Endprodukts mit irgendeinem primären Gut finden.

Dann wäre  $\sum_{j \in M} a_P^j \hat{x}_j \geq 0$ , da aus  $(a_P^j)_k < 0$  für ein primäres Gut Nr.  $k$  die Beziehung  $k \in I_0$  entgegen der Annahme folgen müßte. Insgesamt gälte demnach

$$(2-39) \quad \sum_{j \in M} a^j \hat{x}_j \geq 0,$$

was jedoch dem Postulat L 2 widerspricht. Es muß also  $k \in I_0$  für mindestens ein primäres Gut Nr.  $k$  gelten, q.e.d.

2.4.3 Es ist jetzt ein Leichtes, das Schlüsseltheorem dieser Abschnitte zu beweisen, welches den Zugang zu den späteren Ergebnissen gestattet:

Satz 2.8: Bei einfacher Produktion und Gültigkeit der Annahme L 2 ist das Bestehen der Gleichung  $\bar{y}_F = z_F^0$  eine notwendige Bedingung für die Effizienz eines Produktionsergebnisses.

ses  $\bar{y}$  im Produktionsraum  $Y(A, z_F^0)$ .

Beweis.

Es sei  $\bar{y} = A\bar{x}$ ,  $\bar{x} \geq 0$ , ein in  $Y(A, z_F^0)$  effizientes Produktionsergebnis. Angenommen, es wäre  $\bar{y}_F \geq z_F^0 \geq 0$ . Wir wenden das Lemma 2.4 mit  $\hat{x} = \bar{x}$  an und gewinnen, wenn etwa  $(\bar{y}_F)_1 > (z_F^0)_1$  ist, eine das Endprodukt Nr. 1 mit einem primären Gut verkettende Folge von Basisprozessen

$$(2-40) \quad a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_\lambda}, \quad j_\nu \in N^\alpha.$$

Da annahmegemäß  $(\bar{y}_F)_1 > (z_F^0)_1$  sein soll, läßt sich bei einfacher Produktion, d.h. höchstens einem positiven Ausstoß in jedem Elementarprozeß, ein hinreichend kleines  $\varepsilon_1 > 0$  derart bestimmen, daß, wenn man  $\bar{x}_{j_1} > 0$  durch  $\bar{x}_{j_1} - \varepsilon_1 \geq 0$  ersetzt, in  $A_F \bar{x} \geq z_F^0$  die Ungleichung  $(A_F \bar{x})_1 \geq (z_F^0)_1$  erhalten bleibt, während für alle übrigen Endprodukte die Ungleichung  $A_F \bar{x} \geq z_F^0$  höchstens und für das vom Prozeß Nr.  $j_2$  erzeugte Gut gewiß verschärft wird. Das Verfahren läßt sich also weiterführen, indem  $\bar{x}_{j_2}$  durch  $\bar{x}_{j_2} - \varepsilon_2 \geq 0$  und allgemein  $\bar{x}_{j_\nu}$  durch  $\bar{x}_{j_\nu} - \varepsilon_\nu \geq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, \lambda$ ) substituiert wird. Für hinreichend kleine  $\varepsilon_\nu > 0$  gilt dann  $A_F \bar{\bar{x}} \geq z_F^0$ , worin

$$(2-41) \quad \bar{\bar{x}} = \bar{x} - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \varepsilon_\nu e^{j_\nu} \geq 0$$

gesetzt ist. Aus der Konstruktion von (2-40) gemäß Lemma 2.4 und der Einfachheit der Produktion folgt

$$(2-42) \quad a_P^{j_\nu} = 0 \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, \lambda-1 \quad \text{und} \quad a_P^{j_\lambda} \leq 0.$$

Da, wie vereinbart,  $\bar{y} = A\bar{x}$  effizient ist, maximiert  $\bar{x}$  nach Satz 2.5 die Linearform  $L(x) = (\bar{p}_P A_P)x$  auf der Menge  $X(A, z_F^0)$  für  $\bar{p}_P$  aus (2-24). Andererseits gilt aber wegen

$$(2-43) \quad \bar{p}_P A_P \left( \sum_{\nu} \varepsilon_\nu e^{j_\nu} \right) = \bar{p}_P a_P^{j_\lambda} \varepsilon_\lambda < 0$$

die Ungleichung

$$(2-44) \quad (\bar{p}_P A_P) \bar{\bar{x}} < (\bar{p}_P A_P) \bar{x} \quad \text{für } \bar{\bar{x}} \in X(A, z_F^0).$$

Die Annahme der strengen Ungleichung  $(\bar{y}_F)_i > (z_F^0)_i$  führt mit-  
hin zu einem Widerspruch, q.e.d.

2.4.4 Als erste Anwendung folgert man aus Satz 2.8 in Ver-  
bindung mit dem Existenzsatz 2.6:

Satz 2.9: Bei einfacher Produktion und Gültigkeit der An-  
nahmen L 2 und L 3\* kann jede beliebige Endnachfrage  $z_F^0 \geq 0$   
ohne Überschuß in effizienter Weise produziert werden, d.h.,  
es gibt stets ein effizientes  $\bar{y} = A\bar{x} \in Y(A, z_F^0)$  mit  $\bar{y}_F = z_F^0$ .

Das Postulat L 2 läßt sich stets erfüllen, wenn man zu ei-  
ner gegebenen Matrix  $A_F$  die Matrix  $A_P = ||-e||$  wählt. Man  
spricht im Falle einer derartigen einzeiligen strikt negativen  
Matrix  $A_P$  bei einfacher Produktion von einem endlichen Leontief-  
schen Produktionsmodell, und zwar von einem limita-  
tionalen (einfachen) Leontief-Modell, wenn

1. die Erzeugung jedes der  $r$  Endprodukte in einfacher  
Produktion erfolgt,
2. jedes der  $r$  Endprodukte durch nur einen Basisprozeß  
erzeugt wird,
3.  $A_P$  eine einzeilige, streng negative Matrix, etwa  
 $A_P = ||-e||$ , darstellt, also nur ein Produktions-  
faktor ("Arbeit") vorhanden ist und als Input in je-  
dem Basisprozeß auftritt.

Das endliche substitutionale Leontief-Modell ist durch  
die Bedingungen 1 und 3 allein beschrieben. Die Anzahl der Ba-  
sisprozesse ist endlich, darf aber größer als  $r$  sein.

Es leuchtet ein, daß die Richtigkeit der im Satz 2.8 auf-  
gestellten Behauptung entscheidend von der Struktur der Matrix  
 $A_F$  abhängt. Es ergeben sich wohlbekannte Sätze über solche  
Leontiefischen Input-Output-Matrizen  $A_F$ . 26/

Satz 2.10: Ist die Matrix  $A_F$  produktiv und werden sämtliche  
 $r$  Endprodukte in einfacher Produktion hergestellt, so enthält

$A_F$  genau  $r$  voneinander linear unabhängige Prozeßvektoren  $a_F^j$ .

### Beweis.

Die Matrix besitzt genau den Rang  $r$ . Da  $A_F$  gerade  $r$  Zeilen besitzt, kann ihr Rang höchstens gleich  $r$  sein. Er muß aber auch mindestens gleich  $r$  sein, denn wäre er kleiner, so könnte man einen von den  $a_F^j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) linear unabhängigen Vektor  $b_F^0$  des  $r$ -dimensionalen Raumes  $E_r$  finden. Wegen Annahme  $L\ 3^*$  existiert ein  $x^* \geq 0$  mit  $A_F x^* > 0$ . Nun läßt sich  $\lambda \neq 0$  mit so kleinem Absolutbetrag wählen, daß  $z_F^0 = A_F x^* + \lambda b_F^0 > 0$  gilt. Dieses  $z_F^0$  ist von den Prozeßvektoren in  $A_F$  linear unabhängig und kann infolgedessen keine Darstellung  $z_F^0 = A_F \bar{x}$  gestatten im Widerspruch zum Ergebnis des Satzes 2.9, q.e.d.

Satz 2.11: Ist bei einfacher Produktion die Anzahl  $n$  der Elementarprozesse gleich der Anzahl  $r$  der Endprodukte, so ist die Matrix  $A_F$  dann und nur dann produktiv (Annahme  $L\ 3^*$ ), wenn die Kehrmatrix  $A_F^{-1}$  nichtnegativ ist.

### Beweis.

Notwendigkeit: Ist  $A_F$  produktiv und quadratisch von der Ordnung  $r \times r$ , so folgt aus dem Satz 2.10 die Existenz einer eindeutigen Kehrmatrix  $A_F^{-1} = \|(\alpha_F^j)_i\|$ . Für jedes  $z_F^0 \geq 0$  wird die Gleichung  $z_F^0 = A_F x$  von genau einem  $x^0$  erfüllt,  $x^0 = A_F^{-1} z_F^0$ . Wegen der Gültigkeit des Satzes 2.9 ist  $x^0 \geq 0$ . Wäre nun  $(\alpha_F^j)_i < 0$ , so würde für  $z_F^0 = e^j \geq 0$  in  $x^0$  die Komponente  $x_i^0$  im Widerspruch zu der Bedingung  $x^0 \geq 0$  negativ sein. Also gilt  $A_F^{-1} \geq 0$ .

Hinlänglichkeit: Ist umgekehrt  $A_F^{-1}$  vorhanden und nichtnegativ, so gilt für den Vektor  $z_F^0 = e > 0$  ersichtlich  $A_F^{-1} z_F^0 = x^0 \geq 0$  und infolgedessen  $z_F^0 = A_F x^0 > 0$  für  $x^0 \geq 0$ , q.e.d.

Man bemerke, daß bei einfacher Produktion und produktiver, quadratischer Matrix  $A_F$  jedes Endprodukt von genau einem Elementarprozeß erzeugt wird. Jede der Mengen  $M_i$  enthält genau ein Element; die  $M_i$  sind paarweise disjunkt.

Als Korollar gewinnt man den

Satz 2.12: Erfüllt die Matrix  $A_F$  die Voraussetzungen des Satzes 2.10 und ist sie zudem quadratisch von der Ordnung  $r \times r$ , so folgt

1. aus  $A_F x \geq 0$  die Ungleichung  $x \geq 0$ ,
2. aus  $A_F x \geq 0$  die Ungleichung  $x \geq 0$ ,
3. aus  $A_F x > 0$  die Ungleichung  $x > 0$ .

Beweis.

Nach Satz 2.11 ergibt sich wegen  $A_F^{-1} \geq 0$  in allen drei Fällen  $x \geq 0$ . Numeriert man o.B.d.A. die Elementarprozesse so um, daß das  $i$ -te Endprodukt gerade vom  $i$ -ten Basisprozeß erzeugt wird,  $M_i = \{i\}$ , so folgt in den Fällen 2 und 3 zusätzlich aus  $(A_F x)_i > 0$  die Beziehung  $x_i > 0$ . Es gilt nämlich  $\sum_{j \neq i} (a_F^j)_i x_j \leq 0$  und, wenn man  $(A_F x)_i = z_i^0 > 0$  setzt,

$$(2-45) \quad z_i^0 = \sum_{j \neq i} (a_F^j)_i x_j + (a_F^i)_i x_i > 0.$$

Daher ist  $(a_F^i)_i x_i > 0$  und wegen  $x \geq 0$  auch  $x_i > 0$ , q.e.d.

Abschließend wird als Hauptergebnis dieses Abschnitts das folgende Substitutionstheorem verzeichnet:

Satz 2.13: Die technologische Matrix  $A$  erfülle die Annahmen L 2 und L 3\*. Ist die Produktion einfach, so existiert eine aus genau  $r$  Elementarprozessen bestehende Teilmatrix  $A^{(2)}$  von  $A$  derart, daß das aus ihr gebildete Produktionsmodell jede beliebige Endnachfrage  $z_F^0 \geq 0$  in bezüglich des Raumes  $Y(A, z_F^0)$  effizienter Weise zu erzeugen gestattet und die Auswahl der Teilmatrix  $A^{(2)}$  von der Endnachfrage  $z_F^0$  unabhängig ist.

Beweis.

Man wähle  $\epsilon > 0$ . Unter den getroffenen Annahmen läßt sich nach den Sätzen 2.6 und 2.7 in  $Y(A, z_F^0)$  effizientes Produktionsergebnis  $\bar{y} = A\bar{x}$  bestimmen, wobei  $\bar{y} \in Y(A, \epsilon)$  höchstens  $r$  von Null verschiedene Komponenten hat und nach Satz 2.8

überdies  $\bar{y}_F = e$  gelten muß. Bei Verwendung der durch passende Umnummerierung der Prozesse ermöglichten Zerlegungen  $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)})$  mit  $\bar{x}^{(1)} = 0$ ,  $\bar{x}^{(2)} > 0$  sowie  $A = \|A^{(1)} \ A^{(2)}\|$  erkennt man aus den Beziehungen  $A_F^{(2)} \bar{x}^{(2)} = \bar{y}_F = e > 0$ , daß die Matrix  $A_F^{(2)}$  produktiv ist. Daher besteht die Matrix  $A^{(2)}$  wegen der Einfachheit der Produktion aus mindestens  $r$ , folglich aus genau  $r$  Basisprozessen. Mit  $A^{(2)}$  läßt sich nach Satz 2.9 jede beliebige Nachfrage  $z_F^0 \geq 0$  ohne Überschuß produzieren, und zwar in bezüglich des Raumes  $Y(A^{(2)}, z_F^0)$  effizienter Weise. Es gibt also stets ein  $\bar{x}^{(2)} \geq 0$ , so daß  $z_F^0 = \bar{y}_F = A_F^{(2)} \bar{x}^{(2)} = A_F \bar{x}$  gilt, wobei  $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) \in X(A, z_F^0)$  ist, und  $\bar{y} = A\bar{x}$  im Raume  $Y(A^{(2)}, z_F^0)$  effizient ist.

Zu zeigen bleibt die Effizienz von  $\bar{y}$  im Raume  $Y(A, z_F^0)$ . Wegen der Effizienz von  $\bar{y}$  im Raume  $Y(A, z_F^0)$  existieren Schattenpreise  $\bar{p}$  mit der Eigenschaft, daß

$$(2-46) \quad \bar{p}_F = \bar{p}_{F=} \geq 0, \quad \bar{p}_F > 0,$$

$$(2-47) \quad \bar{p} A^{(1)} \leq 0, \quad \bar{p} A^{(2)} = 0$$

ist. Aus der Gleichung  $A_p \bar{x} = z_F^0$  und der sich aus (2-47) ergebenden Gleichung

$$(2-48) \quad \bar{p} \bar{y} = \bar{p} A^{(2)} \bar{x}^{(2)} = 0$$

folgt, daß  $\bar{y}$  zusammen mit  $\bar{p}$  ebenfalls im Raume  $Y(A, z_F^0)$  das Effizienzkriterium des Satzes 2.4 erfüllt. Dieses Resultat gilt ersichtlich für alle  $z_F^0 \geq 0$ , q.e.d.

Es zeigt sich, daß  $\bar{p}$  für jede beliebige Endnachfrage  $z_F^0$  zur Kennzeichnung effizienter Produktionsalternativen gewählt werden kann. Für jedes  $z_F^0$  können effiziente Punkte stets in der Hyperebene  $H = \{y \mid \bar{p}y = 0\}$  gefunden werden.

Der Satz 2.13 stellt eine erhebliche Verschärfung des Satzes 2.7 dar, bedeutet er doch, daß eine abstrakte Wirtschaft, der die Bestimmung einer effizienten Teilmatrix  $A^{(2)}$  gelungen ist, ohne jede Substitution von Prozessen jede be-

beliebige Nachfrage  $z_F^0 \geq 0$  ebenso wirtschaftlich zu erstellen vermag wie eine Produktionswirtschaft, die bei der Produktion auf die Gesamttechnologie A zurückgreift. Speziell ergibt sich aus Satz 2.13, daß ein produktives endliches substitutionales Leontief-Modell (mit  $n \geq r$  Basisprozessen) stets auf ein limitationales Teilmodell (mit  $n = r$  Prozessen) reduziert werden kann. Dies ist der Inhalt des ursprünglich für das Modell des Kapitels 3 formulierten Substitutionstheorems von Samuelson. Im gegenwärtigen Modell gilt das Substitutionstheorem nicht nur, wie der Satz von Samuelson, für Leontief-Modelle (mit nur einem primären Gut) sondern für alle linearen Technologien mit einfacher Produktion. Diese Verallgemeinerung ist möglich, weil im jetzigen Modell das Faktorangebot keiner Beschränkung unterliegt.

In jedem Falle beruht das Substitutionstheorem entscheidend auf der Annahme einfacher Produktion. (Man studiere die Unterschiede in den Beweisen zu Satz 2.7 und Satz 2.13.) Das folgende Beispiel belegt dies.

Beispiel. Das Produktionsmodell besitze die technologische Matrix

$$(2-49) \quad A = \begin{pmatrix} A_F \\ A_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{11}{50} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \\ \dots\dots\dots \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

gestatte also mehrfache Produktion. Ist  $z_F^0 = (3, 4)$ , so lautet der effiziente Intensitätsvektor  $\bar{x} = (12, 8, 0)$ , was sich mittels des Schattenpreisvektors  $\bar{p} = (4, 2, 1)$  verifizieren läßt. Weder ein allein auf den Prozessen Nr. 1 und 3 noch ein nur auf den Prozessen Nr. 2 und 3 beruhendes Teilmodell liefert einen effizienten Produktionsvektor. Ist dagegen  $z_F^0 = (9, 5)$ , so zeigt man an Hand des Schattenpreisvektors  $\bar{p} = (5, 1, 1)$ , daß der Intensitätsvektor  $\bar{x} = (\frac{75}{2}, 0, \frac{25}{2})$  ein effizientes Produktionsergebnis beschreibt. Dagegen ermöglicht weder ein auf den Prozessen Nr. 1 und 2 noch ein auf

den Prozessen Nr. 2 und 3 allein basierendes Teilmodell effiziente Produktion. Die Auswahl des Teilmodells  $A^{(2)}$  hängt also in diesem Beispiel von der Wahl von  $z_F^0$  ab.

### Kapitel 3

=====

#### Effiziente Produktion und Schattenpreise im linearen

#### Produktionsmodell mit beschränktem Faktorangebot

### 3.1

#### Problemstellung und Definitionen

3.1.1 Wir erörtern jetzt das Problem der Maximierung des Ausstoßes  $y_F$  an finalen Gütern bei beschränktem Faktorangebot  $-y_P \leq z_P^0$ . Dieses Modell wurde ausführlich von Koopmans<sup>27/</sup> mit Hilfe der Theorie der polyedrischen konvexen Kegel und neuerdings von Charnes / Cooper<sup>28/</sup> mit den Verfahren der linearen Programmierung untersucht. Unsere Darstellung hat, indem sie ebenfalls auf der linearen Programmierung beruht, methodische Gemeinsamkeiten mit der Arbeit von Charnes / Cooper. Andererseits unterscheidet sie sich von jener durch ihre rein theoretische Ausrichtung, während jene in besonderem Maße der Behandlung betriebswirtschaftlicher Aspekte von sog. Delegationsmodellen gewidmet ist. Im Hinblick auf praktische Anwendungen benutzen Charnes / Cooper ausschließlich die Theorie der gewöhnlichen skalaren Programmierung, während hier die natürlichere und elegantere Theorie der linearen Vektor-Maxima herangezogen wird.

3.1.2 In der gegenwärtig betrachteten abstrakten Wirtschaft unterliege das Faktorangebot einer Beschränkung; die Schranke des mengenmäßigen Faktorangebots sei  $z_P^0 \geq 0$ . Der Produktionsraum des Modells lautet dann:

$$(3-1) \quad Y = Y(A, z_P^0) = \{y \mid y = Ax, x \in X\},$$

worin

$$(3-2) \quad X = X(A, z_P^0) = \left\{x \mid \begin{array}{l} A_F x \geq 0 \\ A_P x \leq -z_P^0 \end{array}, x \in E_n^+ \right\}.$$

Allein begehrt seien die finalen Güter  $y_F$ . Von ihnen sei zu Beginn der Produktion der untersuchten Planperiode kein Anfangsbestand verfügbar. Bezeichnet

$$(3-3) \quad Y_F = \{y_F \mid y_F = A_F x, x \in X\}$$

die Projektion von  $Y$  in den Raum  $E_r$  der finalen Güter, so besteht unsere Aufgabe darin, die maximalen Punkte  $\bar{y}_F$  der Menge  $Y_F$  zu ermitteln.

Definition 3.1: Ein Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$  heißt effizient, wenn  $\bar{y}_F$  nach Definition 1.1 maximal auf  $Y_F$  ist.

3.1.3 Die im Text benutzte Schreibweise entspricht der in den Kapiteln 1 und 2 eingeführten Symbolik. Namentlich läßt sich für gegebenes  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$  für jeden Vektor  $y \in Y(A, z_P^0)$  die Zerlegung  $y = (y_F, y_{P=}, y_{P>})$  vornehmen, die durch die Bedingungen  $\bar{y}_{P=} + z_{P=}^0 = 0$  und  $\bar{y}_{P>} + z_{P>}^0 > 0$  für  $z_P^0 = (z_{P=}^0, z_{P>}^0)$  bestimmt ist. Die korrespondierende Zerlegung für Preisvektoren lautet  $p = (p_F, p_{P=}, p_{P>})$ .

## 3.2 Effizienzkriterien und Existenzsatz

3.2.1 Satz 3.1 (Allgemeines Effizienzkriterium): Ein Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$  ist dann und nur dann effizient, wenn ein System von Schattenpreisen  $\bar{p}$  existiert, das die Bedingungen

$$(3-4) \quad \bar{p}_F > 0, \quad \bar{p}_{P=} \geq 0, \quad \bar{p}_{P>} = 0,$$

$$(3-5) \quad \bar{p} A \leq 0 \quad \text{und} \quad \bar{p} \bar{y} = 0$$

erfüllt.

Beweis.

Das zum Problem I-L, die Vektor-Maxima  $\bar{y}_F = A_F x$  der Menge  $Y_F$  zu bestimmen, gehörige duale Problem II-L ist durch die Ungleichungen

$$(3-6) \quad w \cdot 0 + u z_P^0 - v y_F \leq 0,$$

$$(3-7) \quad w A_F + u A_P + v A_F \leq 0, \quad (u, w) \geq 0, \quad v > 0$$

beschrieben. Setzt man  $\bar{p}_P = \bar{u}$  und  $\bar{p}_F = \bar{v} + \bar{w}$ , worin  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  die Lösung des dualen Problems darstellt, so erkennt man mit Hilfe von Satz 2.1 und Lemma 2.1, daß die Bedingungen (3-4) und (3-5) notwendig und hinreichend für die Maximalität von  $\bar{y}_F$  auf  $Y_F$  sind, q.e.d.

Für jedes nichttriviale effiziente Produktionsergebnis  $\bar{y} \in Y$  läßt sich statt (3-5) wiederum gleichwertig

$$(3-8) \quad \bar{p} A^{(1)} \leq 0, \quad \bar{p} A^{(2)} = 0$$

schreiben. Bei nichttrivialen effizienten Produktionsalternativen existiert mindestens eine Aktivität (in  $A^{(2)}$ ), die am "break-even"-Punkt liegt,  $\bar{p} a^j = 0$ . Effizient kann nur zu Preisen  $\bar{p}$  verlustlose Produktion sein.

3.2.2 Mittels des Satzes 3.1 und des Lemma 2.2 beweist man ein zweites Kriterium für die Effizienz von Produktionsalternativen:

Satz 3.2: Ein Vektor  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$  ist dann und nur dann effizient, wenn ein Vektor von Schattenpreisen  $p_F^* > 0$  existiert, so daß die Linearform  $L(y_F) = p_F^* y_F$  auf der Menge  $Y_F$  ihr Maximum im Punkte  $\bar{y}_F$  annimmt.

Satz 3.3: Ist  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$  ein nichttrivial effizienter Punkt des Raumes  $Y$ , so ist der Teilvektor  $\bar{y}_{P=}$ , der durch die Bedingung  $\bar{y}_{P=} + z_{P=}^0 = 0$  erklärt ist, nicht leer.

Beweis.

Als  $\bar{y}_F \neq 0$  folgt  $\bar{y}_F \geq 0$ . Wäre nun  $-\bar{y}_P < z_P^0$ , so könnte man ein  $\lambda_0 > 1$  derart wählen, daß auch noch  $-\lambda_0 \bar{y}_P \leq z_P^0$  gilt. Für  $y^0 = \lambda_0 \bar{y}$  ergibt sich dann  $y_F^0 \geq \bar{y}_F$  und  $y^0 \in Y$  im Widerspruch zur Effizienz von  $\bar{y}$ , q.e.d.

3.2.3 Über die Existenz effizienter Produktionsergebnisse gelten folgende beiden Theoreme.

Satz 3.4: Erfüllt die Matrix  $A$  das Postulat L 2, so existiert zu jedem Faktorangebot  $z_P^0 \geq 0$  mindestens ein effizienter Punkt  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$ .

Zum Beweise ist nur zu bemerken, daß mit  $x^0 = 0$  ein zulässiges Element für das primale Maximum-Problem I-L und wegen der Gültigkeit des Postulats L 2 auch ein zulässiges Element  $p^0 = (p_F^0, p_P^0) \geq 0$  für das duale Minimum-Problem II-L vorhanden ist.

Satz 3.5: Befriedigt die Matrix  $A_F$  zusätzlich die Annahme L 3 und ist  $z_P^0 > 0$ , so existiert mindestens ein nichttrivialer effizienter Vektor  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$ .

Beweis.

Ein effizienter Vektor  $\bar{y} \in Y$  ist nach Satz 3.4 vorhanden. Der Vektor  $y = 0$  kann aber nicht effizient sein, weil nach Annahme ein  $x^* \in X(A, z_P^0)$  mit  $y_F^* = A_F x^* \geq 0$  existiert und durch hinreichend kleine Wahl von  $\lambda_0 > 0$  für  $z_P^0 > 0$  die Gültigkeit der Beziehung  $\lambda_0 y^* \in Y$ , d.h.  $-\lambda_0 y_P^* \leq z_P^0$  und  $\lambda_0 y_F^* \geq 0$ , erreicht werden kann, q.e.d.

### 3.3 Duale Preissysteme und allgemeines Tauschgleichgewicht

3.3.1 Die Schattenpreise, welche in den Effizienzkriterien der vorangegangenen Erörterungen auftreten, gestatten eine

interessante von Koopmans<sup>29/</sup> aufgedeckte Deutung. Der folgende Gedankengang ist an jedem der bisher besprochenen linearen Modelle durchführbar, läßt sich aber besonders zwanglos am gegenwärtigen Modell veranschaulichen, bei dem das externe Faktorangebot nicht über eine starre Grenze  $z_P^0 \geq 0$  hinaus ausgedehnt werden kann.

Unterstellt man, daß die abstrakte Wirtschaft zusätzlich zur Produktion die Möglichkeit hat, auf einem externen Markt zu festen Preisen sämtliche primären wie finalen Güter zu tauschen, so verliert die Faktormengenbeschränkung  $-A_P x \leq z_P^0$  insoweit ihren zwingenden Charakter, als Überschüsse an irgendwelchen Gütern eingetauscht werden können in Güter, die im Produktionsprozeß einen Engpaß bilden. Es erhebt sich die Frage, unter welcher Preiskonstellation auf dem Tauschmarkt ein ursprünglich effizientes Produktionsergebnis durch Ausnutzung irgendwelcher Tauschgelegenheiten nicht verbessert werden kann.

3.3.2 Diese Fragestellung soll jetzt präzisiert werden. Die Möglichkeit des Tausches von je zwei Gütern läßt sich in das bisherige Produktionsmodell durch Einführung neuer Basisprozesse "Tausch des Gutes Nr. k gegen das Gut Nr. i" einbeziehen, die bei Einheitsintensität  $\alpha_{ki}$  Einheiten des Gutes Nr. k in  $\beta_{ik}$  Einheiten des Gutes Nr. i transformieren. Für  $k=1$  und  $i=2,3,\dots,m$  ergibt sich die Tauschmatrix

$$(3-9) \quad Q = \begin{vmatrix} -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \dots & -\alpha_{1m} \\ \beta_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{31} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{m1} \end{vmatrix}$$

Der Quotient  $\alpha_{1i}/\beta_{i1}$  sei für jedes i wohldefiniert. Er bildet die feste Tauschrate zwischen dem Gut Nr. 1 und dem Gut Nr. i und drückt zugleich das Verhältnis  $q_i/q_1$  der Marktpreise  $q_1$  und  $q_i$  der Güter Nr. 1 und Nr. i aus. In Preisen  $q = (q_1, q_2,$

...,  $q_m$ ) mit  $q_1 > 0$  ausgedrückt, hat die Matrix  $Q$ , falls nötig, nach neuer Festlegung der Einheitsintensitäten der Prozesse, also das Aussehen

$$(3-10) \quad Q = \begin{vmatrix} -q_2 & -q_3 & \dots & -q_m \\ q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_1 \end{vmatrix}$$

Die Matrix  $\| Q \ -Q \|$ , die  $2(m-1)$  Tauschaktivitäten umfaßt, erlaubt den Austausch sämtlicher Güter. (Bei  $m$  Gütern gibt es insgesamt  $\binom{m}{2} = m(m-1)/2$  Tauschmöglichkeiten.) Um etwa das Gut Nr.  $k$  gegen das Gut Nr.  $i$  zu tauschen, hat man die beiden Prozesse  $(q_k, 0, \dots, 0, -q_i, 0, \dots, 0)$  und  $(-q_i, 0, \dots, 0, q_i, 0, \dots, 0)$  mit positiven Intensitäten zu betreiben. Ist  $k$  bzw.  $i$  gleich 1, so genügt der Einsatz eines einzigen Prozesses.

Erweitert man die technologische Matrix  $A$  zur Matrix

$$(3-11) \quad \bar{A} = \| Q \ -Q \ A \|,$$

so wird der Produktionsraum  $\bar{Y} = Y(\bar{A}, z_P^0)$  im allgemeinen vom ursprünglichen Produktionsraum  $Y = Y(A, z_P^0)$  verschieden sein. Die erweiterte technologische Matrix  $\bar{A}$  befriedigt z.B. nicht mehr die Annahme L 1. Durch die Einführung von Tauschaktivitäten wird die Umkehrbarkeit der Produktion zwar nicht im physischen Sinne, wohl aber im ökonomischen Ergebnis ermöglicht.

3.3.3 Die Frage, ob durch Ausnutzung von Tauschgelegenheiten das Produktionsergebnis  $\bar{y}_F = A_F \bar{x}$  noch verbessert werden kann, läuft darauf hinaus, ob die effizienten Punkte des Raumes  $Y$  auch im Raume  $\bar{Y}$  effizient sind oder nicht. Hierüber gilt folgender

Satz 3.6: Ist ein Produktionsergebnis  $\bar{y}$  in  $Y = Y(A, z_P^0)$  effizient und bezeichnet  $P(\bar{y}|Y)$  die Menge der zugehörigen

Schattenpreisvektoren, so gehört  $\bar{y}$  dann und nur dann zu den effizienten Punkten von  $\bar{Y} = Y(\bar{A}, z_P^0)$ , wenn die Marktpreise  $\bar{q}$  die Beziehung  $\bar{q} \in P(\bar{y}|Y)$  erfüllen.

Beweis.

Notwendigkeit:  $\bar{y}$  sei effizient in  $Y$  und gehöre zu den effizienten Punkten von  $\bar{Y}$ . Dann existiert ein  $\bar{p}$  mit

$$(3-12) \quad \bar{p}_F > 0, \quad \bar{p}_{P=} \geq 0, \quad \bar{p}_{P>} = 0,$$

$$(3-13) \quad \bar{p} \parallel \bar{Q} - \bar{Q} \parallel \leq 0, \quad \bar{p}A \leq 0, \quad \bar{p}\bar{y} = 0.$$

Daraus folgt  $\bar{p} \in P(\bar{y}|Y)$ . Die Matrix  $\bar{Q}$  besitzt genau den Rang  $m-1$  und befriedigt die homogene Gleichung  $\bar{q}\bar{Q} = 0$  mit  $\bar{q} \neq 0$ . Für die nichttriviale Lösung  $\bar{p}$  der Ungleichung  $\bar{p} \parallel \bar{Q} - \bar{Q} \parallel \leq 0$  gilt damit  $\bar{p} = \lambda \bar{q}$ ,  $\lambda > 0$ , und also  $\bar{q} \in P(\bar{y}|Y)$ .

Hinlänglichkeit:  $\bar{y}$  sei effizient in  $Y$ , und es sei  $\bar{q} \in P(\bar{y}|Y)$ . Dann erfüllt  $\bar{y}$  zusammen mit  $\bar{q}$  das Kriterium des Satzes 3.1 im Raume  $\bar{Y}$  (Bedingungen (3-12) und (3-13)) und ist daher in  $\bar{Y}$  effizient, q.e.d.

Die Schattenpreise  $\bar{p}$  besitzen demnach, sofern es Märkte für die finalen und primären Güter gibt, die Funktion von Gleichgewichtspreisen. Das Produktionsergebnis einer durch die technologische Matrix  $A$  beschriebenen abstrakten Wirtschaft ist bei Vorliegen von Tauschmärkten genau dann effizient, wenn die konstanten Marktpreise  $\bar{q}$  gleich einem dem ursprünglichen "autarken" Produktionsergebnis zugeordneten Schattenpreisvektor  $\bar{p}$  sind,  $\bar{q} = \bar{p}$ . Es liegt daher nahe, die Schattenpreise als Surrogat für Marktpreise in Situationen anzusehen, in welchen keine Marktpreise existieren oder zumindest keine Marktpreise ermittelt werden können.<sup>30/</sup>

### 3.4 Das Substitutionstheorem von Samuelson

3.4.1 Für endliche Leontief-Modelle, auf deren Definition in 2.4.4 (S. 56) verwiesen wird, läßt sich mit den bisher-

gen Methoden das bekannte Substitutionstheorem von Samuelson beweisen:

Satz 3.7: <sup>31/</sup> Die technologische Matrix  $A$  eines endlichen substitutionalen Leontief-Modells erfülle die Annahme L 3\*. Dann läßt sich ein limitationales Leontief-Modell mit der technologischen Matrix  $A^{(2)}$  derart bestimmen, daß die Beziehung  $Y_F(A, z_P^0) = Y_F(A^{(2)}, z_P^0)$  identisch für alle  $z_P^0 \geq 0$  gilt.

Beweis. <sup>32/</sup>

Man betrachte die technologische Matrix  $A$  zunächst, unabhängig von dem Wert von  $z_P^0$ , als einem Produktionsmodell vom Typ  $Y(A, z_P^0)$ , wie in 2.1.2 eingeführt, zugehörig. Die Anwendung des Satzes 2.13 führt zu einer aus genau  $r$  Basisprozessen bestehenden Teilmatrix  $A^{(2)}$  aus der Matrix  $A$ . Diese Teilmatrix konstituiert ein produktives einfaches Leontief-Modell.

Für alle  $z_P^0 \geq 0$  gilt gewiß  $Y_F(A^{(2)}, z_P^0) \subseteq Y_F(A, z_P^0)$ .

Gezeigt wird, daß die umgekehrte Inklusion  $Y_F(A, z_P^0) \subseteq Y_F(A^{(2)}, z_P^0)$  gleichfalls erfüllt ist. Wählt man bei gegebenem  $z_P^0 \geq 0$  irgendein  $y^0 \in Y(A, z_P^0)$  und setzt  $z_F^0 = y_F^0$ , so ist  $y^0 \in Y(A, z_F^0)$ , und nach Satz 2.13 läßt sich im Raume  $Y(A, z_F^0)$  ein effizientes Produktionsergebnis  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  derart finden, daß  $\bar{y}_F = z_F^0 = y_F^0$  gilt. Da  $z_P^0$  und  $y_P$  im Falle eines Leontief-Modells eindimensionale Vektoren (reelle Zahlen) darstellen, folgt aus der Effizienz von  $\bar{y}$  im Raume  $Y(A, z_F^0)$  die Beziehung  $-\bar{y}_P \leq -y_P^0 \leq z_P^0$ . Es resultiert  $\bar{y} \in Y(A^{(2)}, z_P^0)$  und damit  $y_F^0 \in Y_F(A^{(2)}, z_P^0)$ , q.e.d.

Der soeben hergeleitete Satz erfordert einige Erläuterungen.

Bemerkung 1. Aus der Gleichheit  $Y_F(A, z_P^0) = Y_F(A^{(2)}, z_P^0)$  folgt, daß sich die im Produktionsraum des substitutionalen Modells effizienten Punkte sämtlich ohne Verletzung der Faktorbeschränkung auch im Rahmen des Teilmodells produzieren lassen. Eine Substitution von Prozessen zum Zwecke der Produktion verschiedener effizienter Outputs ist weder bei konstantem

noch bei variiertem Faktorangebot erforderlich.

Bemerkung 2. Ebenso wenig wie die Voraussetzung einfacher Produktion (vgl. das Beispiel nach Satz 2.13) ist die Annahme abdingbar, daß nur ein primäres Gut an der Produktion mitwirkt,  $y_P$  und  $z_P^0$  also skalare Größen sind. Sind mehrere Produktionsfaktoren vorhanden, so braucht zu einem gegebenen  $y^0 \in Y(A, z_P^0)$  der im Raume  $Y(A, z_F^0)$  mit  $z_F^0 = y_F^0$  effiziente Vektor  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  mit  $\bar{y}_F = y_F^0$  nicht mehr den Faktorbeschränkungen  $-\bar{y}_P \leq z_P^0$  zu genügen, wie folgendes Beispiel lehrt.

Beispiel. Es sei

$$(3-14) \quad A = \begin{pmatrix} A_F \\ A_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ 0,3 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,3 & 0,3 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -0,1 & -0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad z_P^0 = (1, 0, 1, 0).$$

Der Punkt  $y^0 = (1, 5, 3, 0, -1, 0, -1, 0)$ , den man mittels des Intensitätsvektors  $x^0 = (5, 5, 5)$  gewinnt, ist Element von  $Y(A, z_P^0)$ . Mithin ist  $y_F^0 = (1, 5, 3, 0)$  Element von  $Y_F(A, z_P^0)$ . Jedoch ist  $y_F^0$  weder für  $A^{(2)} = \| a^1 \ a^2 \|$ , noch für  $A^{(2)} = \| a^1 \ a^3 \|$  in  $Y_F(A^{(2)}, z_P^0)$  enthalten. Die eindeutigen effizienten Produktionsergebnisse  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  mit  $\bar{y}_F = y_F^0$  lauten  $\bar{y} = (1, 5, 3, 0, -1, 5, 0, 0)$  für  $A^{(2)} = \| a^1 \ a^2 \|$  und  $\bar{y} = (1, 5, 3, 0, -0, 5, -2, 0)$  für  $A^{(2)} = \| a^1 \ a^3 \|$ , wie man mit Satz 2.4 an Hand der Schattenpreise  $\bar{p} = (1, 1, 3, 2)$  bzw.  $\bar{p} = (3, 2, 9, 3)$  nachprüft. In jedem Falle werden also die Restriktionen  $-\bar{y}_P \leq z_P^0$  verletzt.

3.4.2 Häufig kommt es nicht nur auf die Ermittlung einzelner effizienter Punkte des Produktionsraums  $Y(A, z_P^0)$  an, sondern darüber hinaus auf die Bestimmung der Menge aller effizienten Produktionsalternativen bei gegebener Faktorschranke  $z_P^0$ . (Entsprechendes gilt auch für das im vorigen Kapitel behandelte Produktionsmodell.) Indes ist die Beschreibung der Menge  $Y^e$  der effizienten Produktionsergebnisse des

Raumes  $Y(A, z_P^0)$ , abgesehen von allgemeinen Charakterisierungen, in der Regel explizite kaum möglich. Eine Ausnahme bilden die Leontief-Modelle, über welche folgendes Korollar des Substitutionstheorems gilt.

Satz 3.8: In jedem produktiven Leontief-Modell mit dem Produktionsraum  $Y = Y(A, z_P^0)$  ist die effiziente Teilmenge  $Y_F^e$  des Raumes  $Y_F$  darstellbar als der Durchschnitt des nichtnegativen Orthanten  $E_r^+$  des Raumes  $E_r$  der Endprodukte mit einer  $(r-1)$ -dimensionalen Hyperebene

$$(3-15) \quad H(u^\oplus, \alpha^\oplus) = \{y_F \mid u^\oplus y_F = \alpha^\oplus\}$$

mit streng positiver Normale  $u^\oplus > 0$  und nichtnegativem  $\alpha^\oplus$ .

Beweis.

Jedes produktive substitutionale Leontief-Modell läßt sich nach Satz 3.7 auf ein produktives limitationales Teilmodell zurückführen. Die Matrix A darf also o.B.d.A. als einem produktiven limitationalen Leontief-Modell zugehörig betrachtet werden.

Ein Punkt  $y = Ax$  aus dem Produktionsraum  $Y(A, z_P^0)$  eines limitationalen Leontief-Modells ist genau dann effizient, wenn  $x$  Element der Menge  $X^e = \{x \mid -A_P x = z_P^0, x \in X\}$  ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist im wesentlichen die Aussage des Satzes 3.3. Die Hinlänglichkeit erkennt man wie folgt. Wäre für ein  $x' \in X^e$  und ein  $x^*$  die Beziehung  $A_P x^* = y_F^* \geq y_F' = A_P x'$  erfüllt, so müßte  $A_P(x^* - x') \geq 0$  und daher nach Satz 2.12 auch  $x^* \geq x'$  sein. Multipliziert man diese Ungleichung mit dem streng positiven Vektor  $-A_P$ , so resultiert  $-A_P x^* > -A_P x' = z_P^0$  und damit  $x^* \notin X(A, z_P^0)$  und  $x^* \notin Y(A, z_P^0)$ .

Wählt man nun  $u^\oplus = -A_P A_F^{-1} > 0$  (vgl. Satz 2.10 und 2.11) sowie  $\alpha^\oplus = z_P^0 \geq 0$ , so gilt die Beziehung  $u^\oplus y_F = \alpha^\oplus$  dann und nur dann, wenn  $y = Ax \in Y(A, z_P^0)$  und  $x \in X^e$  ist, q.e.d.



(1,3,6), (1,3,7), (1,4,6), (1,4,7), (2,3,6), (2,3,7), (2,4,6) und (2,4,7) - die Zahlen bedeuten hierbei die Indizes der ausgewählten Basisprozesse - allein die zum Teilmodell (1,4,6) gehörige Matrix  $A^{(2)} = \begin{bmatrix} a^1 & a^4 & a^6 \end{bmatrix}$  "optimal" ist. Die Kehrmatrix von  $A_F^{(2)}$  lautet

$$(3-18) \quad (A_F^{(2)})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{190}{47} & \frac{40}{47} & \frac{35}{47} \\ \frac{680}{47} & \frac{205}{47} & \frac{105}{47} \\ \frac{750}{47} & \frac{195}{47} & \frac{200}{47} \end{bmatrix}.$$

Wählt man, wie im Beweise des Satzes 3.8,

$$(3-19) \quad u^\oplus = p_F^\oplus = -A_P^{(2)} (A_F^{(2)})^{-1} = \left( \frac{692}{47}, \frac{1865}{470}, \frac{172}{47} \right),$$

so erhält man als Gleichung der Hyperebene  $H(u^\oplus, \alpha^\oplus)$

$$(3-20) \quad \frac{692}{47}(y_F)_1 + \frac{1865}{470}(y_F)_2 + \frac{172}{47}(y_F)_3 = 5.$$

Sollen sämtliche effizienten Punkte  $\bar{y}$  explizite dargestellt werden, so bedient man sich der Ausdrücke (3-16). Sie lauten hier:

$$(3-21) \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \frac{235}{692} \lambda_1 \\ \frac{2350}{1865} \lambda_2 \\ \frac{235}{172} \lambda_3 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \frac{47}{692} \lambda_1 \\ \frac{470}{1865} \lambda_2 \\ \frac{47}{172} \lambda_3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  ist.

Daß sämtliche  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$ , die in der Form (3-21) darstellbar sind, tatsächlich in  $Y$  effizient sind, bestätigt man mittels des Effizienzkriteriums des Satzes 3.1 anhand der Schattenpreise  $p_F^\oplus = u^\oplus$  aus (3-19) und  $p_P^\oplus = 1$ .

3.4.4 Im obigen Beispiel befriedigt der allein aus der "optimalen" Teilmatrix  $A^{(2)}$  errechnete Preisvektor  $p_F^\oplus = -A_P^{(2)} (A_F^{(2)})^{-1}$ ,  $p_P^\oplus = 1$  zusammen mit  $\bar{y}$  aus (3-21) das Effizienzkriterium des Satzes 3.1 nicht nur im Teilraum  $Y(A^{(2)}, z_P^0)$ ,

sondern darüber hinaus auch im Gesamtraum  $Y(A, z_P^0)$ . Tatsächlich gilt für Leontief-Modelle folgender Spezialfall des Simplex-Kriteriums:

Satz 3.9: Unter den Annahmen des Satzes 3.7 ist ein limitationales Teilmodell aus einem substitutionalen Leontief-Modell mit der Matrix  $A$  dann und nur dann "optimal", wenn seine Matrix  $A^{(2)}$  die Bedingung

$$(3-22) \quad A_P - A_P^{(2)} (A_F^{(2)})^{-1} A_F \leq 0$$

erfüllt.

Beweis.

Notwendigkeit:  $A^{(2)}$  sei eine "optimale" Teilmatrix von  $A$ . Die Matrix  $A_F^{(2)}$  ist dann invertierbar. Nach den Sätzen 3.7 und 3.8 existiert für  $z_P^0 = e > 0$  ein im Gesamtraum  $Y(A, z_P^0)$  effizienter Punkt  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  mit  $\bar{x}^{(2)} > 0$ . Daraus folgt nach Satz 2.12 die Ungleichung  $\bar{x}^{(2)} > 0$ , und für jeden  $\bar{y}$  zugeordneten (nach Satz 3.1 vorhandenen) Schattenpreisvektor  $\bar{p}$  mit  $\bar{p}A \leq 0$  und  $\bar{p}\bar{y} = 0$  gilt  $\bar{p}A^{(2)} = 0$ . Normiert man  $\bar{p}$ , so daß  $\bar{p}_P = 1$  wird ( $\bar{p}_P$  kann nicht gleich Null sein), so ergibt sich  $\bar{p}_F A_F^{(2)} = -A_P^{(2)}$  und daraus  $\bar{p}_F = -A_P^{(2)} (A_F^{(2)})^{-1}$ , d.h.  $\bar{p} = p^\oplus$ . Es folgt  $p^\oplus A \leq 0$ , und die Bedingung (3-22) ist erfüllt.

Die Hinlänglichkeit der Bedingung (3-22) ist im Hinblick auf den Beweis des Satzes 3.8 offenkundig, q.e.d.

Die Bedeutung des letzten Satzes liegt vornehmlich darin, daß ein limitationales Teilmodell aus einem substitutionalen Leontief-Modell sicher nicht "optimal" ist, also keine effizienten Punkte von  $Y(A, z_P^0)$  erzeugen kann, wenn seine Matrix  $A^{(2)}$  die Bedingung (3-22) verletzt. Satz 3.9 läßt sich nicht ohne weiteres auf allgemeinere endliche lineare Produktionsmodelle übertragen; ein Vektor  $\bar{y} = A^{(2)} \bar{x}^{(2)}$  kann im Produktionsraum  $Y(A, z_P^0)$  effizient sein, obwohl ein aus dem Teilmodell  $A^{(2)}$  hergeleiteter Schattenpreisvektor das Kriterium des Satzes 3.1 im Gesamtraum  $Y(A, z_P^0)$  nicht erfüllt.

3.4.5 Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Dualitätstheorie eine einfache und elegante Herleitung der Haupteigenschaften produktiver Leontief-Modelle erlaubt:

1. Ist  $z_P^0 > 0$ , so enthält der Produktionsraum  $Y(A, z_P^0)$  jedes produktiven endlichen Leontief-Modells mit  $r$  Endprodukten überabzählbar unendlich viele effiziente Punkte, die alle in einer  $(r-1)$ -dimensionalen Hyperebene in  $E_m$  liegen.
2. Jede ein bestimmtes Endprodukt erzeugende Industrie kann sich auf den Einsatz eines einzigen Basisprozesses beschränken, selbst wenn alternative Produktionsprozesse verfügbar sind.
3. Die Schattenpreise sind unabhängig von der autonomen Nachfrage und vom Arbeitsangebot  $z_P^0$ .
4. Es gibt unendlich viele Aufteilungen des Arbeitsangebots  $z_P^0$  auf die die  $r$  Endprodukte erzeugenden Industrien, die sämtlich zu effizienten Produktionsergebnissen der Gesamtwirtschaft führen.

### 3.5 Das allgemeine lineare Produktionsmodell mit Faktorbeschränkungen

3.5.1 In diesem Anhang zum Kapitel 3 soll in Anlehnung an Abschnitt 1.5 das allgemeine lineare Produktionsmodell mit beschränktem Faktorangebot  $z_P^0 \geq 0$  behandelt werden. Unter Beibehaltung der im Abschnitt 1.5 eingeführten Symbolik erklären wir den Produktionsraum des gegenwärtigen Modells durch den Ausdruck

$$(3-23) \quad Y(S, z_P^0) = Y(S) \cap Z(z_P^0),$$

worin

$$(3-24) \quad Z(z_P^0) = \left\{ y \mid y = \begin{pmatrix} y_F \\ y_F \end{pmatrix}, y_F \geq 0, y_F + z_P^0 \geq 0 \right\}.$$

3.5.2 Wir beweisen in diesem Absatz ein allgemeines Effizienzkriterium, das sich als Spezialfall des Satzes 6.2 ergibt. Bei erster Lektüre kann das Folgende überschlagen werden.

Der abgeschlossene konvexe Kegel  $Y(S)$  läßt sich gewöhnlich durch eine parametrische Darstellung

$$(3-25) \quad Y(S) = \left\{ y \mid y = \begin{pmatrix} y_F \\ y_P \end{pmatrix}, \begin{matrix} f(x) \geq y_F \\ g(x) \leq y_P \end{matrix}, x \geq 0 \right\}$$

beschreiben, wobei  $f(x)$  und  $g(x)$  vektorwertige konkave, linear homogene und differenzierbare Funktionen auf  $E_x^+$  bedeuten.<sup>34/</sup> Gibt es eine derartige Darstellung, so heiße der Kegel  $Y(S)$  parametrisierbar. Eine Technologie  $S$  wird Slater-regulär, kurz: regulär, genannt, wenn die Menge  $Y(S)$  einen inneren Punkt der Menge  $Z(z_P^0)$  enthält. Diese Regularität ist eine leichte Verschärfung der Annahme der Produktivität, die sich ausschließlich auf die Menge  $Y_F$  bezog.

Das allgemeine Effizienzkriterium können wir jetzt in folgender Form aussprechen:

Satz 3.10: Der Kegel  $Y(S)$  sei an Hand der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  parametrisierbar. (a) Notwendig für die Effizienz eines Produktionsergebnisses  $\bar{y} \in Y(S, z_P^0)$  ist bei regulärer Technologie  $S$ , daß ein Preisvektor  $\bar{p}$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$(3-26) \quad \bar{p}_F \geq 0, \quad \bar{p}_P \leq 0, \quad \bar{p}_P > 0,$$

$$(3-27) \quad \bar{p}y \leq 0 \quad \text{für alle } y \in Y(S, z_P^0)$$

und

$$(3-28) \quad \bar{p}\bar{y} = 0.$$

(b) Ist  $\bar{p}_F > 0$ , so sind die Bedingungen (3-26) bis (3-28) auch hinreichend für die Effizienz von  $\bar{y} \in Y(S, z_P^0)$ .

Beweis.

(a) Wegen der Parametrisierbarkeit von  $Y(S)$  führt der Satz 6.2, dessen Voraussetzungen für  $\Omega = \Gamma = E_x^+$  erfüllt sind, sofort zu den Bedingungen (3-26) und

$$(3-29) \quad \bar{p}_F y_F + \bar{p}_P y_P \leq \bar{p}_F f(x) + \bar{p}_P g(x) \leq \bar{p}_F f(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0,$$

sofern  $\bar{y}_F = f(\bar{x})$  gesetzt wird. Aus der Zerlegung

$$\begin{aligned} (3-30) \quad \bar{p}_F f(\bar{x}) + \bar{p}_P g(\bar{x}) &= \bar{p}_F f(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0 = \\ &= \bar{p}_F (f(\bar{x}) - F(\bar{x})\bar{x}) + \bar{p}_P (g(\bar{x}) - G(\bar{x})\bar{x}) \end{aligned}$$

folgt nach dem Eulerschen Lehrsatz für linear-homogene Funktionen überdies  $\bar{p}_F f(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0 = 0$ . Damit sind auch die Bedingungen (3-27) und (3-28) erfüllt.

- (b) Die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3-26) bis (3-28) ist für  $\bar{p}_F > 0$  durch Satz 6.2 gewährleistet, q.e.d.

Bemerkung. Die gegenüber den bisherigen Effizienztheoremen neue Voraussetzung in Satz 3.10a, daß die Technologie S regulär sei, ist vermutlich abdingbar.

3.5.3 Eine allgemeine Leontief'sche Technologie S ist durch folgende Annahmen gekennzeichnet:

1. Die Menge S der Elementarprozesse ist eine nicht-leere kompakte Teilmenge von  $E_m$ .
2. Aus  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in S$  und  $a_{i_0} > 0$  folgt  $a_i \leq 0$  für alle  $i \neq i_0$ .
3. Der Teilvektor  $a_P$  von  $a \in S$  ist eindimensional, und es gilt  $a_P < 0$  für alle  $a \in S$ , d.h., es ist nur ein primäres Gut ("Arbeit") vorhanden, das in allen Prozessen verbraucht wird.

Die Technologie S heißt produktiv, wenn S einen Output  $y^*$  zu erzeugen gestattet, für den  $y_F^* > 0$  gilt.

Wir beweisen zunächst das

Lemma 3.4: <sup>35/</sup> Ist die Technologie S produktiv und der Produktionsraum  $Y(S, z_P^0)$ ,  $z_P^0 > 0$ , kompakt, so existiert ein effizienter Punkt  $\bar{y} \in Y(S, z_P^0)$  mit  $\bar{y}_F > 0$ .

Beweis.

Da  $Y(S, z_P^0)$  kompakt ist, gilt dasselbe von der Projektion  $Y_F$  in den Raum  $E_r$ . Die Funktion  $L(y_F) = ey_F$  nimmt auf der nicht-leeren und kompakten Menge  $U = \{y_F \mid y_F \geq y_F^*, y_F \in Y_F\}$ , worin für  $y^* \in Y(S, z_P^0)$  annahmegemäß die Bedingung  $y_F^* > 0$  erfüllt sei, ihr Maximum an, etwa im Punkte  $\bar{y}_F$ . <sup>36/</sup> Nach Lemma 2.2 ist  $\bar{y}_F$  vektor-maximal auf  $U$  und auf  $Y_F$ , q.e.d.

Ferner gilt

Lemma 3.2: Der Produktionsraum  $Y(S, z_P^0)$  ist eine konvexe Punktmenge.

Beweis.

Der Durchschnitt der konvexen Mengen  $Y(S)$  und  $Z(z_P^0)$  ist wiederum konvex, q.e.d.

In Ergänzung des Satzes 3.7 beweisen wir jetzt den

Satz 3.11 (Substitutionstheorem von Samuelson/Arrow):

Zu jedem produktiven allgemeinen Leontief-Modell mit der Technologie  $S$  und mit kompaktem Produktionsraum  $Y(S, z_P^0)$  läßt sich ein endliches limitationales Leontiefsches Modell mit technologischer Matrix  $A = ||a^j||$ ,  $a^j \in S$ ,  $j=1,2,\dots,r$ , derart auswählen, daß für alle  $z_P^0 \geq 0$  die Gleichheit  $Y_F(S, z_P^0) = Y_F(A, z_P^0)$  identisch erfüllt ist.

Beweis. <sup>37/</sup>

Ist  $z_P^0 = 0$ , so bestehen  $Y(S, z_P^0)$  und  $Y(A, z_P^0)$  für alle aus  $S$  wählbaren Matrizen  $A$  trivialerweise aus dem Nullpunkt von  $E_m = E_{r+1}$ .

Also sei  $z_P^0 > 0$ . Wegen der Produktivität von  $S_F$  existiert nach Lemma 3.1 ein effizienter Punkt  $\bar{y} \in Y(S, z_P^0)$  mit  $\bar{y}_F > 0$ , etwa  $\bar{y} = \sum_j a^j \bar{x}_j$ , wobei  $a^j \in S$ ,  $\bar{x}_j \geq 0$  und  $j=1,2,\dots,n$  mit endlichem  $n$ . Die Matrix  $||a^j||$  bildet die Technologie eines produktiven endlichen Leontief-Modells. Nach Satz 3.7 läßt sich zu diesem Leontief-Modell ein limitationales Leontief-Modell mit gleichem Produktionsraum  $Y_F$  bestimmen; die

technologische Matrix dieses limitationalen Modells werde mit  $A$  bezeichnet. Dann gilt  $\bar{y} = A\bar{w}$  für ein  $\bar{w} \geq 0$ .

Für alle  $z_P^0 > 0$  gilt die Beziehung

$$(3-31) \quad Y_F(A, z_P^0) \subseteq Y_F(S, z_P^0).$$

Zu zeigen ist die Gültigkeit der umgekehrten Inklusion. Zunächst bemerkt man, daß  $\bar{y}$  auch im Raume  $Y(A, z_P^0)$  effizient ist. Nach Satz 3.3 gilt also  $-\bar{y}_P = z_P^0$ . Man wähle nun irgendein  $y^0 \in Y(S, z_P^0)$ . Da die Matrix  $A_F$  wegen  $A_F \bar{w} = \bar{y}_F > 0$  produktiv ist, läßt sich nach Satz 2.9 ein  $w^0 \geq 0$  so bestimmen, daß  $y_F^0 = A_F w^0$  ist. Für  $w^0$  muß dann, wie zu zeigen bleibt,  $-A_P w^0 = -y_P^0 \leq z_P^0$  gelten, woraus  $y^0 = A w^0 \in Y(A, z_P^0)$  resultiert.

Daß tatsächlich  $-y_P^0 = -A_P w^0 \leq z_P^0$  gilt, sieht man wie folgt. Wäre  $-y_P^0 > z_P^0$ , so ließe sich ein  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  so bestimmen, daß  $-\alpha y_P^0 = z_P^0$  gilt. Ferner existiert ein so kleines  $\beta$  mit  $0 < \beta < 1$ , daß für den Punkt

$$(3-32) \quad \bar{\bar{y}} = (1+\beta)\bar{y} - \alpha\beta y^0$$

die Ungleichung  $\bar{\bar{y}}_F \geq 0$  erhalten bleibt (was wegen  $\bar{y}_F > 0$  erreichbar ist). Setzt man  $\bar{\bar{y}} = A\bar{\bar{w}}$ , so ist nach Satz 2.12 und nach Konstruktion  $\bar{\bar{w}} \geq 0$  und  $-\bar{\bar{y}}_P = z_P^0$  und also  $\bar{\bar{y}} \in Y(S, z_P^0)$ . Schreibt man statt (3-32)

$$(3-33) \quad \frac{1+\beta}{1+\alpha\beta} \bar{y} = \frac{1}{1+\alpha\beta} \bar{\bar{y}} + \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} y^0,$$

so erkennt man, daß der Punkt  $y^* = \frac{1+\beta}{1+\alpha\beta} \bar{y}$  eine konvexe Kombination der Punkte  $y^0, \bar{\bar{y}} \in Y(S, z_P^0)$  darstellt und nach Lemma 3.2 selbst Element von  $Y(S, z_P^0)$  ist. Nach der Konstruktion von  $\alpha$  und  $\beta$  müßte für diesen Punkt  $y_F^* > \bar{y}_F$  im Widerspruch zur Effizienz von  $\bar{y}$  gelten.

Also muß  $\alpha \geq 1$  und mithin  $-A_P w^0 = -y_P^0 \leq z_P^0$  sein. Aus  $y^0 = A w^0 \in Y(A, z_P^0)$  folgt  $y_F^0 \in Y_F(A, z_P^0)$  und damit

$$(3-34) \quad Y_F(S, z_P^0) \subseteq Y_F(A, z_P^0)$$

für alle  $z_P^0 > 0$ , q.e.d.

## Kapitel 4

### Die numerische Bestimmung der Menge der effizienten

#### Punkte im linearen Produktionsmodell

#### 4.1 Theorie der Spiralmethode von Charnes/Cooper

4.1.1 In diesem Kapitel beschäftigt uns das Problem der numerischen Bestimmung der Menge  $Y^e$  aller effizienten Punkte in einem gegebenen Produktionsraum vom Typ  $Y(A, z_P^0)$  oder  $Y(A, z_F^0)$ . Im allgemeinen ermangelt es der besonderen Einfachheit der Darstellung von  $Y^e$ , durch die sich beispielsweise Leontief-Modelle auszeichnen. Dennoch kann die Menge  $Y^e$  gewöhnlich für jeden konkret gegebenen Produktionsraum  $Y$  numerisch bestimmt werden. Hierbei hat man sich der Techniken des sog. parametrischen Programmierens <sup>38/</sup> zu bedienen. Die Grundlage für die Anwendbarkeit dieser Verfahren bildet das Lemma 2.2 über die Parametrisation des Vektor-Maximum-Problems. Maximiert man z.B. die Linearform  $L(y_F) = v^0 y_F$  bezüglich der Nebenbedingungen

$$(4-1) \quad y_F - A_F x = 0, \quad -A_P x \leq z_P^0, \quad x \geq 0, \quad y_F \geq 0$$

für jedes positive  $v^0 > 0$ , so gewinnt man aus der Menge aller so erreichten Optimallösungen  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  die Menge  $Y^e$  der effizienten Punkte  $\bar{y} \in Y(A, z_P^0)$ . Praktisch gangbar wird dieser Weg erst durch den Umstand, daß die Menge  $Y^e$  darstellbar ist als streckenzugweise zusammenhängende Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder, die sich als konvexe Kombinationen von Extrempunkten der polyedrisch-konvexen Menge  $Y(A, z_P^0)$  ergeben. Diese Tatsache bildet die Basis des hier zu behandelnden Verfahrens der parametrischen Programmierung, das von Charnes / Cooper unter dem Namen "Spiralmethode" entwickelt worden ist. <sup>39/</sup>

4.1.2 Grundzüge der Simplex-Methode. Wir betrachten das kanonische Maximumproblem der skalaren linearen Programmierung, das darin besteht, die Linearform  $d = cx$  auf der Menge

$$(4-2) \quad X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

zu maximieren. Die Elemente von  $X$  mögen primal zulässig heißen. Das duale Minimumproblem besteht nach 2.2.1 darin <sup>40/</sup>, die Linearform  $h = ub$  auf der Menge

$$(4-3) \quad R = \{u \mid uA \geq c\}$$

zu minimieren. Die Elemente  $u$  von  $R$  heißen dual zulässig.

Aus Satz 2.1 und Lemma 2.1 folgert man sofort:

Satz 4.1: Ein primal zulässiger Vektor  $x^0$  ist dann und nur dann eine Lösung des Maximumproblems, wenn ein dual zulässiger Vektor  $u^0$  mit der Eigenschaft  $cx^0 = u^0b$  existiert.

Lemma 4.1: Für jedes zulässige Vektorpaar  $(x^0, u^0)$  mit  $cx^0 = u^0b$  gilt

$$(4-4) \quad u^0(b - Ax^0) = 0 \quad \text{und} \quad (u^0A - c)x^0 = 0.$$

A sei eine Matrix der Ordnung  $p \times q$ . Unter  $N = \{j \mid j = 1, \dots, q\}$  verstehe man die Menge der Spaltenindizes von A. Für jedes  $x^0 \in X$  läßt sich eine Untermenge  $M = M(x^0)$  von  $N$  durch

$$(4-5) \quad M = M(x^0) = \{j \mid x_j^0 > 0, j \in N\}$$

erklären. Wir schreiben

$$(4-6) \quad x_M = (x_j), \quad c_M = (c_j), \quad A_M = \|a^j\| \quad \text{für } j \in M(x^0),$$

wobei der Index  $M$  aus technischen Gründen ausnahmsweise als Subskript gesetzt ist und die Indizes  $j$  zwecks Kompatibilität in allen Zerlegungen in derselben Reihenfolge auftreten.

Von besonderem Interesse sind die Extrempunkte  $\hat{x}$  der Menge  $X$ , d.h. diejenigen Punkte von  $X$ , die keine Darstellung der

Gestalt  $\hat{x} = \frac{1}{2}(x + x')$ ,  $x \neq x'$ ,  $x, x' \in X$  erlauben. Folgende Hilfssätze lassen sich ohne Schwierigkeit herleiten:

Lemma 4.2: Ein Vektor  $\hat{x} \in X$  ( $\hat{x} \neq 0$ ) ist genau dann ein Extrempunkt von  $X$ , wenn die Vektoren  $a^j$ ,  $j \in M(\hat{x})$ , voneinander linear unabhängig sind.

Lemma 4.3: Ist  $\bar{x} \in X$  eine Lösung des Maximumproblems, so existiert auch ein das Problem lösender Extrempunkt  $\hat{x} \in X$  ("Basislösung").

Unter  $B = B(\hat{x})$  verstehe man irgendeine Teilmenge von  $N$  mit der Eigenschaft, daß  $M(\hat{x})$  in  $B(\hat{x})$  enthalten ist und daß die Vektoren  $a^j$ ,  $j \in B(\hat{x})$ , voneinander linear unabhängig sind. Entsprechend den Ausdrücken (4-6) lassen sich Vektoren  $c_B$  und  $x_B$  sowie die Matrix  $A_B$  bilden, wobei wiederum aus schreibtechnischen Gründen der Index  $B$  ausnahmsweise als Subskript gesetzt wird.  $\hat{x}$  sei ein Extrempunkt von  $X$ . Wir definieren den Vektor  $t^0$  durch die Gleichung

$$(4-7) \quad b = A_B t^0, \quad B = B(\hat{x}),$$

also  $t^0 = \hat{x}_B$ . Existiert eine Matrix  $T$ , so daß

$$(4-8) \quad A = A_B T, \quad B = B(\hat{x}),$$

gilt, so nennen wir  $T$  bzw. die erweiterte Matrix  $S = ||t^0 T|| = ||t^0 t^1 t^2 \dots t^q||$  ein dem Extrempunkt  $\hat{x}$  zugeordnetes oder das zur Basis  $A_B$  gehörige Simplex-Tableau. Die Simplex-Methode bildet ein Iterationsverfahren, bei dem aus den Tableaus  $T$  sukzessive neue Basen  $A_B$  und damit eventuell auch neue Extrempunkte von  $X$  ermittelt werden, bis schließlich eine Basislösung, falls eine solche existiert, erreicht ist.<sup>41/</sup> Die Optimalität eines Extrempunktes  $\hat{x}$ , zu dem ein Tableau  $T$  bekannt ist, läßt sich an Hand des folgenden Simplex-Kriteriums überprüfen:

Satz 4.2: Ein Extrempunkt  $\hat{x} \in X$  mit einem Tableau  $T$  ist immer dann eine Basislösung des kanonischen Maximumproblems, wenn die Ungleichung

$$(4-9) \quad c_B^T \geq c, \quad B = B(\hat{x}),$$

erfüllt ist. Gilt  $B(\hat{x}) = M(\hat{x})$ , so ist die Ungleichung (4-9) zugleich notwendig für die Optimalität von  $\hat{x}$ .

Beweis.

Hinlänglichkeit: Es gelte (4-9). Nach der Definition von  $B(\hat{x})$  enthalten die Zeilenvektoren der Matrix  $A_B$  eine Basis des Raumes  $E_{c_B}$ . Daher existiert ein  $\hat{u}$  mit  $c_B = \hat{u}A_B$ . Aus (4-8) und (4-9) folgt somit  $c_B^T = \hat{u}A_B^T = \hat{u} \geq c$ .  $\hat{u}$  ist also dual zulässig. Ferner gilt  $c_B^T B = \hat{u}A_B^T B = c_B$ . Da  $M(\hat{x})$  in  $B(\hat{x})$  enthalten ist, ergibt sich hieraus  $\hat{u}\hat{x} = c\hat{x}$ . Andererseits gilt wegen  $A\hat{x} = b$  zugleich  $\hat{u}A\hat{x} = \hat{u}b$ , woraus nach Satz 4.1 die Optimalität des Vektors  $\hat{x}$  folgt.

Notwendigkeit: Ist  $\hat{x} \in X$  eine Lösung des Maximumproblems, so gibt es nach Satz 4.1 ein  $\hat{u} \in R$  mit  $c\hat{x} = \hat{u}b$ . Nach Lemma 4.1 gilt  $(\hat{u}A - c)\hat{x} = 0$ , woraus für  $M = M(\hat{x})$  wegen  $\hat{u}A \geq c$  die Gleichung  $\hat{u}A_M = c_M$  folgt. Wegen  $B(\hat{x}) = M(\hat{x})$  ergibt sich hieraus  $c_B^T = \hat{u}A_B^T = \hat{u} \geq c$ , also die Bedingung (4-9), q.e.d.

4.1.3 Struktur der Menge  $\hat{X}^e$  der effizienten Extrempunkte.  
Wir zerlegen den Vektor  $x$  in zwei Teilvektoren  $w$  und  $y$ , also  $x = (w, y)$ . Für  $c$  erhalten wir die korrespondierende Zerlegung  $c = (c_w, c_y)$ , wobei wir zur Abkürzung  $c_y = v$  setzen.  $X_y$  bezeichnet die Projektion der Menge  $X$  in den euklidischen Raum  $E_y$ . Wie bisher, nennen wir einen Punkt  $\bar{x} \in X$  effizient, wenn der Teilvektor  $\bar{y}$  aus  $\bar{x} = (\bar{w}, \bar{y})$  auf der Menge  $X_y$  gemäß Definition 1.1 maximal ist. Als allgemeines Effizienzkriterium erhält man aus Satz 2.1 und Lemma 2.2 ähnlich wie die Sätze 2.5 und 3.2 den

Satz 4.3: Die Menge  $X^e$  der effizienten Punkte von  $X$  ist identisch mit der Menge aller Vektoren  $\bar{x} = (\bar{w}, \bar{y})$ , welche die Linearform  $L(x) = cx = 0 \cdot w + v \cdot y$  für irgendein  $c = (0, v)$  mit  $v > 0$  auf  $X$  maximieren.

Gestellt ist die Aufgabe, die Menge  $\hat{X}^e$  der effizienten Extrempunkte von  $X$  vollständig zu erfassen.

Lemma 4.4: Die Menge  $\hat{X}^e$  ist endlich.

Beweis.

Gezeigt wird, daß die Menge  $\hat{X}$  aller Extrempunkte von  $X$  endlich ist. Das Mengensystem  $\mathfrak{M} = \{M(\hat{x}) \mid \hat{x} \in \hat{X}\}$  enthält höchstens  $2^q$  Elemente. Nach dem Lemma 4.2 ist jedem Element von  $\mathfrak{M}$  genau ein Extrempunkt zugeordnet, q.e.d.

Unter  $V(x^0)$  verstehe man die Menge aller Vektoren  $c = (0, v)$  mit  $v \geq 0$ , für welche die Linearform  $L(x)$  aus Satz 4.3 ihr Maximum auf  $X$  im Punkte  $x^0$  annimmt, also

$$(4-10) \quad V(x^0) = \left\{ c = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \mid v \geq 0, L(x^0) \geq v y \text{ für alle } y \in X_y \right\}.$$

Über die zu effizienten Extrempunkten  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  gehörigen Mengen  $V(\hat{x})$  leiten wir folgenden Hilfssatz her:

Lemma 4.5: Existiert zu  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  ein Simplex-Tableau  $T$  zur Basis  $A_B$ ,  $B = B(\hat{x}) = M(\hat{x})$ , so gilt

$$(4-11) \quad V(\hat{x}) = \left\{ c = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \mid v \geq 0, c_B^T \geq c \right\}.$$

Beweis.

Nach dem Satz 4.2 ist ein Punkt  $\hat{x} \in \hat{X}$  unter der Bedingung, daß ein Tableau  $T$  zur Basis  $A_B$ ,  $B(\hat{x}) = M(\hat{x})$ , existiert, dann und nur dann eine Lösung des Problems, die Linearform  $L(x) = cx$  auf  $X$  zu maximieren, wenn die Bedingung (4-9) erfüllt ist, q.e.d.

Die Lemmata 4.4 und 4.5 gestatten unter allgemeinen Regularitätsbedingungen grundsätzlich die Ermittlung sämtlicher Punkte von  $\hat{X}^e$ . Die üblichen Regularitätsannahmen sind:

R 1: Der Rang der  $p \times q$ -Matrix  $A = \|a^j\|$  ist gleich  $p$ .

R 2: Es ist nicht möglich, den Vektor  $b$  als positive Linearkombination von weniger als  $p$  Spaltenvektoren  $a^j$  auszudrücken.

R 2 ist als Annahme der Nicht-Degeneriertheit (NDG) der Restriktionsmenge  $X$  bekannt. Beide Annahmen sind wenig einschneidend.<sup>42/</sup> Man erkennt unschwer die Gültigkeit von

Lemma 4.6: Unter den Annahmen R 1 und R 2 ist ein Punkt  $\hat{x} \in X$  genau dann ein Extrempunkt, wenn  $M(\hat{x})$  genau  $p$  Elemente enthält.

Zusammen mit Lemma 4.2 ergibt sich hieraus, daß für jeden Extrempunkt  $\hat{x}$  von  $X$  die Matrix  $A_M$ ,  $M = M(\hat{x})$ , nichtsingulär ist; es gilt also  $B(\hat{x}) = M(\hat{x})$ . Man kann nun für jede der höchstens  $\binom{q}{p}$  nichtsingulären  $p \times p$ -Teilmatrizen  $A_B$  von  $A$  feststellen, ob sie einen Extrempunkt  $\hat{x}$  von  $X$  definiert, indem man prüft, ob  $\hat{x}_M = \hat{x}_B = A_B^{-1} b > 0$  gilt. Hat man auf diese Weise sämtliche Punkte  $\hat{x}$  von  $\hat{X}$  ermittelt, so bestimmt man die ihnen eindeutig zugeordneten Tableaus  $T = A_B^{-1} A$ ,  $B = B(\hat{x}) = M(\hat{x})$ , und wählt diejenigen Punkte von  $\hat{X}$  aus, deren Tableaus eine Lösung  $c^* = (0, v^*)$  mit  $v^* > 0$  der Ungleichung  $c_M^T \leq c$  gestatten. Diese Punkte  $\hat{x}$  bilden die Elemente von  $\hat{X}^e$ . Die Menge  $\hat{X}^e$  ist also in endlich vielen Schritten bestimmbar. Praktisch verbietet sich dieses Vorgehen allerdings wegen des großen Rechenaufwandes.

Eine rechnerisch erheblich einfachere Methode eröffnet die Bemerkung, daß aus dem Simplex-Tableau eines gegebenen effizienten Extrempunktes  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  weitere effiziente Extrempunkte (soweit vorhanden) festgestellt werden können. Wir sagen, zwei Extrempunkte  $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \hat{X}^e$  seien benachbart, im symbolischen Ausdruck:  $\langle \bar{x}, \bar{\bar{x}} \rangle$ , wenn die (gewiß nichtleeren) Mengen  $V(\bar{x})$  und  $V(\bar{\bar{x}})$  einen gemeinsamen Punkt  $c^* = (0, v^*)$  mit  $v^* > 0$  enthalten. Faßt man jetzt die Punkte  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  als Knotenpunkte eines Graphen  $G$  und die Gebilde  $\langle \bar{x}, \bar{\bar{x}} \rangle$  als seine Kanten auf, so läßt sich das Problem der Ermittlung sämtlicher effizienten Extrempunkte  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  als ein Labyrinthproblem interpretieren und mit den Mitteln der Graphentheorie lösen, sofern zu jedem Punkt  $\bar{x} \in \hat{X}^e$  sämtliche benachbarten Punkte  $\bar{\bar{x}}$  bestimmt werden können. Dies ist im folgenden auszuführen.<sup>43/</sup>

Ein Graph  $G$  heißt zusammenhängend, wenn jedes Paar  $\bar{x}, \bar{x}$  seiner Knotenpunkte entweder benachbart liegt oder aber durch eine Kette von Paaren benachbarter Knotenpunkte der Art

$$(4-12) \quad \langle \bar{x}, \hat{x}^1 \rangle, \langle \hat{x}^1, \hat{x}^2 \rangle, \dots, \langle \hat{x}^{r-1}, \hat{x}^r \rangle, \langle \hat{x}^r, \bar{x} \rangle$$

mit  $r \geq 1$  verbunden ist. Es gilt:

Satz 4.4: Der aus den effizienten Extrempunkten  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  als Knotenpunkten gebildete Graph  $G$  ist endlich und zusammenhängend. 44/

Beweis.

Nach dem Lemma 4.4 ist die Anzahl der effizienten Extrempunkte von  $X$  und mithin der Graph  $G$  endlich. Zu dem Nachweis, daß  $G$  zusammenhängend ist, zeigen wir zunächst, daß das Mengensystem  $\Sigma = \{V(\hat{x}) \mid \hat{x} \in \hat{X}^e\}$  eine abgeschlossene Überdeckung 45/ der Menge  $\{c \mid c = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, v \geq 0\}$  bildet. Daß die Mengen  $V(\hat{x})$  sämtlich abgeschlossen sind, folgt unmittelbar aus ihrer Definition. Man wähle nun irgendein  $c^0 = (0, v^0)$  mit  $v^0 > 0$ . Diesem  $c^0$  ist nach Satz 4.3 ein effizienter Punkt  $\bar{x} \in X^e$  und daher nach Lemma 4.3 auch ein effizienter Extrempunkt  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  zugeordnet, so daß  $L(\bar{x}) = L(\hat{x}) \supseteq c^0 x$  für alle  $x \in X$  gilt. Daher ist  $c^0 \in V(\hat{x})$ . Ferner ist auch jeder Punkt  $c = (0, v)$  mit  $v \geq 0$  in einem  $V(\hat{x})$ ,  $\hat{x} \in \hat{X}^e$ , enthalten. Dies folgt aus dem Umstand, daß die Mengen  $V(\hat{x})$  abgeschlossen sind und ihre Anzahl nach dem Lemma 4.4 endlich ist.

Man wähle jetzt zu dem gegebenen Paar  $\bar{x}, \bar{x}$  von Knotenpunkten aus  $G$  zwei (gewiß vorhandene) Vektoren  $\bar{c} = (0, \bar{v}) \in V(\bar{x})$  und  $\bar{c} = (0, \bar{v}) \in V(\bar{x})$  mit  $\bar{v} > 0$  und  $\bar{v} > 0$ . Das Mengensystem  $\Sigma$  bildet dann eine abgeschlossene Überdeckung des Segments  $S = \{c \mid \lambda \bar{c} + (1-\lambda)\bar{c}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ . Diese Tatsache impliziert, daß entweder  $\bar{x}$  und  $\bar{x}$  benachbart liegen oder eine Kette (4-12) benachbarter Knotenpunktpaare aus  $G$  existiert, q.e.d.

Der Satz 4.4 gestattet die Lösung des erwähnten Labyrinthproblems. Charnes / Cooper 46/ haben der Spiralmethode

die Tarrysche Lösung dieses Problems zugrunde gelegt, die im folgenden nach König <sup>47/</sup> frei zitiert wird.

Voraussetzungen:  $G$  sei ein zusammenhängender endlicher Graph. Es soll im Zuge des Iterationsverfahrens (der "Wanderung") bei jeder Ankunft in irgendeinem Knotenpunkt  $\hat{x}^\lambda$  von  $G$  für jede nach  $\hat{x}^\lambda$  laufende Kante  $\langle \hat{x}^\lambda, \hat{x}^Q \rangle$  von  $G$  bekannt sein, ob sie schon in der Richtung nach  $\hat{x}^Q$  beschrieben wurde, und man soll stets diejenige Kante bestimmen können, auf der  $\hat{x}^\lambda$  zum erstenmal erreicht wurde ("Eintrittskante" von  $\hat{x}^\lambda$ ).

Vorschrift von Tarry: Kommt man auf einer Kante  $\langle \hat{x}^\lambda, \hat{x}^\mu \rangle$  nach einem Knotenpunkt  $\hat{x}^\mu$ , so setze man die Wanderung mit irgendeiner Kante  $\langle \hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu \rangle$  fort, die in der Richtung nach  $\hat{x}^\nu$  noch nicht beschrieben wurde; man wähle aber für  $\langle \hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu \rangle$  nur dann die Eintrittskante von  $\hat{x}^\mu$ , falls die übrigen nach  $\hat{x}^\mu$  laufenden Kanten  $\langle \hat{x}^\mu, \hat{x}^Q \rangle$  sämtlich schon in der Richtung nach  $\hat{x}^Q$  beschrieben wurden.

Die Wanderung bricht ab, wenn man zum Anfangspunkt der Wanderung zurückgekehrt ist.

Satz 4.5 (Satz von Tarry): Die Wanderung nach obiger Regel muß abbrechen. Beim Abbrechen der Wanderung wurde jede Kante von  $G$  genau zweimal beschrieben, je einmal in beiden Richtungen.

4.1.4 Der praktische Wert der Methode von Tarry hängt im besonderen davon ab, ob sämtliche von einem gegebenen Punkt  $\bar{x} \in \hat{X}$  ausgehenden Kanten  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$  von  $G$  leicht bestimmbar sind. Folgender Satz lehrt, daß derartige Kanten (gegebenenfalls sogar alle Kanten  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$ ) aus dem  $\bar{x}$  zugeordneten Simplex-Tableau ablesbar sind.

Satz 4.6: Dem Punkte  $\bar{x} \in \hat{X}$  sei das Tableau  $T$  zur Basis  $A_{\bar{B}}$ ,  $\bar{B} = B(\bar{x})$ , zugeordnet.  $\bar{x} \in \hat{X}$  sei ein zweiter Extrempunkt von  $\bar{X}$ . Damit die Punkte  $\bar{x}$  und  $\bar{x}$  effizient und benachbart seien, ist notwendig, daß es ein  $\bar{v} = (0, \bar{v})$  mit  $\bar{v} > 0$  existiert, so daß

$$(4-13) \quad \bar{c}_{\bar{B}}^T \geq \bar{c}, \quad \bar{B} = B(\bar{x}),$$

und

$$(4-14) \quad \bar{c}_{\bar{B}}^T \bar{M} = \bar{c}_{\bar{M}}, \quad \bar{M} = M(\bar{x}),$$

gilt.

Die Bedingungen (4-13) und (4-14) sind auch notwendig, damit  $\bar{x}$  und  $\bar{\bar{x}}$  zwei benachbarte effiziente Extrempunkte seien, sofern  $B(\bar{x}) = M(\bar{x})$  ist.

Beweis.

Hinlänglichkeits: Die Bedingungen (4-13) und (4-14) seien mit  $\bar{c} = (0, \bar{v})$ ,  $\bar{v} > 0$  erfüllt. Aus (4-13) folgt nach Satz 4.2 die Ungleichung

$$(4-15) \quad \bar{c}\bar{x} \geq \bar{c}x \quad \text{für alle } x \in X$$

und nach dem Beweis des Satzes 4.2 die Existenz eines Vektors  $\bar{u}$  mit  $\bar{c}_{\bar{B}} = \bar{u}A_{\bar{B}}$  und  $\bar{u}b = \bar{c}\bar{x}$ . Ferner besteht wegen  $\bar{x} \in \hat{X}$  die Gleichung  $A\bar{x} = b$ . Aus (4-14) ergibt sich demnach

$$(4-16) \quad \bar{c}\bar{x} = \bar{c}_{\bar{B}}^T \bar{x} = \bar{u}A_{\bar{B}}^T \bar{x} = \bar{u}A\bar{x} = \bar{u}b = \bar{c}\bar{x}.$$

Aus (4-15) und (4-16) folgt die Effizienz von  $\bar{x}$  und  $\bar{\bar{x}}$  sowie  $\bar{c} \in V(\bar{x}) \cap V(\bar{\bar{x}})$ .

Notwendigkeit:  $\bar{x}$  und  $\bar{\bar{x}}$  seien zwei benachbarte Punkte von  $\hat{X}^e$ ,  $T$  sei das  $\bar{x}$  zur Basis  $A_{\bar{B}}$ ,  $\bar{B} = B(\bar{x}) = M(\bar{x})$ , zugeordnete Tableau. Dann gibt es nach Definition ein  $\bar{c} = (0, \bar{v})$  mit  $\bar{v} > 0$ , das den Mengen  $V(\bar{x})$  und  $V(\bar{\bar{x}})$  gemeinsam ist, also die Linearform  $L(x) = \bar{c}x$  auf  $X$  in  $\bar{x}$  und  $\bar{\bar{x}}$  maximiert. Daher gilt

$$(4-17) \quad L(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} = \bar{c}\bar{\bar{x}} = L(\bar{\bar{x}}).$$

Nach Lemma 4.5 ist (4-13) mit  $\bar{c}$  erfüllt. Wäre nun  $\bar{c}_{\bar{B}}^T \bar{M} > \bar{c}_{\bar{M}}$ , so würde wegen  $\bar{x}_{\bar{M}} > 0$  die Ungleichung  $\bar{c}\bar{x} < \bar{c}_{\bar{B}}^T \bar{x}$  resultieren. Andererseits gilt aber, da nach dem Beweis zu Satz 4.2 ein  $\bar{u}$  mit  $\bar{u}A_{\bar{B}} = \bar{c}_{\bar{B}}$  und  $\bar{u}b = \bar{c}\bar{x}$  vorhanden ist,

$$(4-18) \quad \bar{c}_{\bar{B}}^T \bar{x} = \bar{u}A_{\bar{B}}^T \bar{x} = \bar{u}A\bar{x} = \bar{u}b = \bar{c}\bar{x}.$$

Damit würde ein Widerspruch zu (4-17) folgen. Es muß also

auch (4-14) befriedigt sein, q.e.d.

Es sei daran erinnert, daß die im zweiten Teil des Satzes 4.6 erforderliche Gleichheit  $M(\bar{x}) = B(\bar{x})$  bei Gültigkeit der Annahmen R 1 und R 2 erfüllt sind.

Mit Hilfe des Satzes 4.6 lassen sich alle nach  $\bar{x} \in \hat{X}^e$  laufenden Kanten  $\langle \bar{x}, \bar{\bar{x}} \rangle$  von G bei passender Variation von c bzw. v dem Tableau T entnehmen, sofern die Menge der Extrempunkte  $\hat{X}$  bekannt ist. Das eigentlich konstruktive Mittel zur numerischen Bestimmung der zu  $\bar{x} \in \hat{X}^e$  benachbarten effizienten Extrempunkte liefert aber erst der auf den üblichen Rechenverfahren der Simplex-Methode beruhende Beweis von

Satz 4.7: Die Menge  $X^e$  der effizienten Punkte von X sei beschränkt.  $\bar{x} \in \hat{X}^e$  sei ein effizienter Extrempunkt, dessen Tableau T die Bedingung (4-13) mit einem  $\bar{c} = (0, \bar{v})$ ,  $\bar{v} > 0$ , erfüllt. Gilt dann für ein nicht in  $B(\bar{x})$  enthaltenes  $j^* \in N$  die Gleichung  $\bar{c}_{\bar{B}} t^{j^*} = \bar{c}_{j^*}$ , so läßt sich ein zu  $\bar{x}$  benachbarter effizienter Extrempunkt  $\hat{x}$  mit  $j^* \in B(\hat{x})$  finden.

Beweis.

$S = || t^0 t^1 t^2 \dots t^q || = || t^0 T ||$  sei das Simplex-Tableau von  $\bar{x}$ . Für die Tableauspalte  $t^{j^*}$  kann nicht  $t^{j^*} \leq 0$  sein. Sonst würde aus der nach (4-7) und (4-8) für jedes reelle  $\theta$  bestehenden Identität

$$(4-19) \quad A - (\bar{x}_{\bar{B}} - \theta t^{j^*}) + a^{j^*} \theta = b, \quad \bar{B} = B(\bar{x}),$$

und der nach Voraussetzung gültigen Gleichung

$$(4-20) \quad \bar{c}_{\bar{B}} (\bar{x}_{\bar{B}} - \theta t^{j^*}) + \bar{c}_{j^*} \theta = \bar{c}_{\bar{B}} \bar{x}_{\bar{B}}, \quad \bar{B} = B(\bar{x}),$$

durch die Wahl von beliebig großem  $\theta > 0$  folgen, daß die Menge  $X^e$  im Widerspruch zur Annahme unbeschränkt ist. Infolgedessen hat  $t^{j^*}$  mindestens eine positive Komponente. Bezeichnet  $i^*$  einen Index aus  $B(\bar{x})$ , für welchen

$$(4-21) \quad \frac{t_{i*}^0}{t_{i*}^{j*}} = \min_{\substack{i \in \bar{B} \\ t_1^{j*} > 0}} \left\{ \frac{t_i^0}{t_i^{j*}} \right\}$$

gilt, so erhält man aus  $S$  ein neues Simplex-Tableau  $\hat{S} = ||\hat{t}^0 \hat{T}||$  durch die bekannten Transformationen

$$(4-22) \quad \hat{s}_{j*} = \frac{1}{t_{i*}^{j*}} s_{i*},$$

$$(4-23) \quad \hat{s}_i = s_i - \frac{t_i^{j*}}{t_{i*}^{j*}} s_{i*}, \quad i \neq i*, \quad i \in \bar{B},$$

worin  $s_i, i \in \bar{B}$ , die Zeilenvektoren der Matrix  $S$  und  $\hat{s}_i, i \in \hat{B}$ , die Zeilenvektoren der neuen Matrix  $\hat{S}$  bezeichnet. Dabei bedeutet  $\hat{B}$  die Indexmenge, die aus  $\bar{B}$  entsteht, wenn man das Element  $i^*$  durch das Element  $j^*$  ersetzt. Man verifiziert, daß die Vektoren  $a^j, j \in \hat{B}$ , voneinander linear unabhängig sind, da nach Annahme die Spaltenvektoren von  $A_{\bar{B}}$  linear unabhängig sein sollten.  $\hat{S}$  bildet daher das Simplex-Tableau zur Basis  $A_{\hat{B}}$ . Zu dieser Basis gehört wegen  $\hat{t}^0 \geq 0$  (vgl. (4-21) bis (4-23)) der Extrempunkt  $\hat{x} = (\hat{x}_{\hat{B}}, 0)$  mit  $\hat{x}_{\hat{B}} = \hat{t}^0$  (vgl. Lemma 4.2). Wegen  $\bar{c}_{\bar{B}} T_{\bar{B}} = \bar{c}_{\bar{B}}$  und  $\bar{c}_{\bar{B}} t^{j*} = \bar{c}_{j*}$  gilt ferner  $\bar{c}_{\bar{B}} T_{\hat{B}} = \bar{c}_{\hat{B}}$  und a fortiori  $\bar{c}_{\bar{B}} T_{\hat{M}} = \bar{c}_{\hat{M}}$  für  $\hat{M} = M(\hat{x})$ . Der Punkt  $\hat{x} \in X$  ist daher nach Satz 4.6 effizient und benachbart zu  $\bar{x}$ , q.e.d.

Bemerkung. Das durch die wohlbekannten Rechenschritte (4-22) und (4-23) der Simplex-Methode aus  $T$  gewonnene Tableau  $\hat{T}$  erfüllt gleichfalls das Simplex-Kriterium (4-9). Dies ergibt sich aus der nützlichen Zerlegung

$$(4-24) \quad \bar{c}_{\hat{B}} \hat{T} - \bar{c} = (\bar{c}_{\bar{B}} T - \bar{c}) - (\bar{c}_{\bar{B}} t^{j*} - \bar{c}_{j*}) \hat{t}_{j*},$$

worin, wie bisher,  $t^{j*}$  die  $j^*$ -te Spalte von  $T$  und  $\hat{t}_{j*}$  die  $j^*$ -te Zeile von  $\hat{T}$  bedeuten. Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.7 gilt offenbar  $\bar{c}_{\hat{B}} \hat{T} \geq \bar{c}$ .

4.1.5 Die von Charnes / Cooper beschriebene Spiralmethode der parametrischen Programmierung nutzt die aus den Sätzen 4.6 und 4.7 erhältliche Information über benachbarte effiziente Extrempunkte von  $X$  zur Anwendung der Vorschrift von Tarry aus. Die Schritte der Spiralmethode lassen sich wie folgt beschreiben: 48/

- (1) Hat man für ein  $\bar{c} = (0, \bar{v})$  mit  $\bar{v} > 0$  ein die Ungleichung (4-9) befriedigendes Tableau  $T$  ("Optimum-Tableau") gewonnen, so notiere man den aus  $T$  in der Spalte  $t^0$  ersichtlichen effizienten Extrempunkt und vermerke, aus welcher Basis die Basis  $A_{\bar{B}}$  hervorgegangen und wann  $A_{\bar{B}}$  zum erstenmal aufgetreten ist.
- (2) Sodann versuche man, mit dem im Beweis zu Satz 4.7 dargestellten Simplex-Verfahren aus  $T$  ein neues Optimum-Tableau  $\hat{T}$  gemäß folgenden Regeln zu ermitteln:
  - (a) Ist im Tableau  $T$  die Bedingung  $\bar{c}_{\bar{B}} t^{j*} = \bar{c}_{j*}$  für ein  $j* \notin \bar{B}$  erfüllt, so prüfe man, ob durch Einführung von  $a^{j*}$  in die alte Basis  $A_{\bar{B}}$  eine neue, von  $A_{\bar{B}}$  aus noch nicht erhaltene Basis  $A_{\hat{B}}$  resultiert. Bejahendenfalls ergibt sich ein weiteres Optimum-Tableau  $\hat{T}$ , mit welchem man den Schritt (1) wiederholt, es sei denn,  $A_{\hat{B}}$  sei die Basis, aus der  $A_{\bar{B}}$  zum erstenmal hervorgegangen ist.
  - (b) Führt die Regel (2a) nicht zum Schritt (1) zurück oder gilt in  $T$  für alle  $j \notin \bar{B}$  die Ungleichung  $\bar{c}_{\bar{B}} t^j > \bar{c}_j$ , so versuche man durch Erhöhung irgendeiner einzelnen Komponente von  $\bar{v}$  die Gleichung  $\bar{c}_{\bar{B}} t^{j*} = \bar{c}_{j*}$  für ein  $j* \notin \bar{B}$  unter Wahrung der Bedingung  $\bar{c}_{\bar{B}} T \geq \bar{c}$  zu verwirklichen. Gelingt dies, so verfare man nach (2a).
- (3) Gelangt man nach den Regeln unter (2) nicht zum Schritt (1) zurück, so wähle man als neue Basis diejenige Basis  $A_{\hat{B}}$ , aus der die Basis  $A_{\bar{B}}$  zum erstenmal hervorgegangen ist, und denjenigen Wert  $\hat{c} = (0, \hat{v})$ ,  $\hat{v} > 0$ , der beim Übergang von  $A_{\hat{B}}$  nach  $A_{\bar{B}}$  vorlag. Man notiere den Schritt von  $A_{\bar{B}}$

nach  $A_B$  und versuche, auf die neue Basis die Regeln (2) anzuwenden.

- (4) Existiert kein zurückliegendes Optimum-Tableau, so bricht die Spiralmethode ab.

Das von Charnes / Cooper angegebene Verfahren erfordert einige Bemerkungen.

Da die Ungleichung  $c_B^T \geq c$  homogen in  $c$  bzw.  $v$  ist, genügt es, die Komponenten von  $v$  einzeln nacheinander zu erhöhen, um alle zur Entdeckung neuer Extrempunkte in Frage kommenden Vektoren  $c = (0, v)$ ,  $v > 0$ , zu erfassen.

Die obigen Regeln finden ihre Rechtfertigung in den Sätzen 4.4 und 4.7 sowie der hinreichenden Bedingung von Satz 4.6. Sie gelten auch dann, wenn das kanonische Maximumproblem degeneriert in dem Sinne sein sollte, daß für einen Extrempunkt  $\hat{x}$  die Menge  $M(\hat{x})$  eine echte Teilmenge von  $B(\hat{x})$  ist. Gleichwohl ist bislang nicht der volle Nachweis erbracht worden, daß das obige Verfahren unter allen Umständen eine Tarrysche Wanderung definiert. Die obige Wanderung bricht zwar stets ab, aber es ist noch nicht gezeigt worden, daß mit den speziellen Rechenregeln (4-21) bis (4-24) wirklich alle zu einem  $\bar{x}$  benachbarten effizienten Extrempunkte automatisch erfaßt werden. Auf diese und gewisse andere Schwierigkeiten kann hier nicht näher eingegangen werden. Jedenfalls darf man bei der numerischen Anwendung der Spiralmethode erwarten, vollständige Lösungen zu erhalten.

4.1.6 Hat man mit der Spiralmethode sämtliche effizienten Extrempunkte  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  ermittelt, so läßt sich die Menge  $X^e$  aller effizienten Punkte von  $X$  als Vereinigung konvexer Kombinationen der  $\hat{x}$  konstruieren. Es gilt:

Lemma 4.7: Ist  $U$  eine nichtleere Teilmenge von  $\hat{X}^e$ , so daß der Durchschnitt  $\bigcap_{\hat{x}^Q \in U} V(\hat{x}^Q)$  einen Punkt  $c^* = (0, v^*)$  mit  $v^* > 0$  enthält, so ist jeder Punkt  $x$  der Menge

$$(4-25) \quad X^e(U) = \left\{ x \mid x = \sum_Q \lambda_Q \hat{x}^Q, \lambda_Q \geq 0, \sum_Q \lambda_Q = 1, \hat{x}^Q \in U \right\}$$

ein effizienter Punkt von  $X$ .

Der Beweis ist offenbar, da für jedes  $x \in X^e(U)$  die Beziehung  $L(x) = c^*x = c^*\hat{x} = L(\hat{x})$  mit  $c^* \in V(\hat{x})$  für ein  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  gilt.

In Verbindung mit der Tatsache, daß jede beschränkte, abgeschlossene konvexe Menge von ihren Extrempunkten aufgespannt wird, ergibt sich somit der

Satz 4.8: Ist die Menge  $X^e$  der effizienten Punkte von  $X$  beschränkt, so läßt sie sich darstellen als die Vereinigung der Mengen  $X^e(U)$  für alle der (endlich vielen) Teilmengen  $U$  von  $\hat{X}^e$  mit der im Lemma 4.7 genannten Eigenschaft, also

$$(4-26) \quad X^e = \bigcup_U X^e(U).$$

## 4.2 Beispiel für die Anwendung der Spiralmethode

4.2.1 Es wird ein numerisches Beispiel für die Bestimmung der effizienten Punkte in einem Produktionsraum vom Typ  $Y(A, z_P^0)$  (vgl. 4.1.1) durchgerechnet. Die Bedingung (4-1) wird durch die Einführung eines  $s$ -dimensionalen Vektors von nichtnegativen Schlupfvariablen in der kanonischen Form (4-2) geschrieben. Die Matrix  $A$  in (4-2) hat dann das Aussehen

$$(4-27) \quad A = \left\| \begin{array}{ccc} -A_F & 0 & I_r \\ -A_P & I_s & 0 \end{array} \right\|,$$

worin  $I_r$  und  $I_s$  Einheitsmatrizen bedeuten. Der Vektor  $x$  aus (4-2) ist entsprechend  $q = (n+s+r)$ -dimensional; er wird gemäß der zu Anfang von 4.1.3 angegebenen Zerlegung in den  $(n+s)$ -dimensionalen Teilvektor  $w$  (Aktivitätsgrade und Schlupfvariable) und den  $r$ -dimensionalen Teilvektor  $y = y_F$  (Endproduktmengen) aufgespalten. Der Vektor  $b = (0, z_P^0)$  ist  $(p+m = r+s)$ -dimensional. Mit diesen Vereinbarungen läßt sich die in

4.1.2 bis 4.1.6 entwickelte Theorie auf das vorliegende Problem anwenden. Das Problem erfüllt stets die Annahme R 1, niemals aber die Annahme R 2.

4.2.2 Die ursprüngliche technologische Matrix sei

$$(2-28) \quad \begin{pmatrix} A_F \\ A_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

die Faktorschranke sei  $z_P^0 = (1, 1)$ .

Teilt man den beiden Schlupfvariablen die Komponenten  $x_6 = w_6$  und  $x_7 = w_7$  zu, so lautet die Matrix (4-27) in unserem Beispiel in Tableau-Form

|             |              |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|-------------|--------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
|             |              |           | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_7$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$    |
|             |              | $\hat{x}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0        |
| $c_B$       | $B(\hat{x})$ | $t^0$     | $t^1$ | $t^2$ | $t^3$ | $t^4$ | $t^5$ | $t^6$ | $t^7$ | $t^8$ | $t^9$ | $t^{10}$ |
| 1           | 8            | 0         | -1    | 1     | 0     | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0        |
| 1           | 9            | 0         | 0     | -1    | 0     | -1    | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 0        |
| 1           | 10           | 0         | 1     | -1    | -1    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1        |
| 0           | 6            | 1         | 1     | 1     | 0     | 2     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0        |
| 0           | 7            | 1         | 0     | 1     | 2     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0        |
| $c_B^T - c$ |              |           | 0     | -1    | -1    | -2    | -1    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0        |

Der Tabelle ist zu entnehmen, daß die Matrix A aus (4-27) zugleich das Tableau T zur Basis  $A_B = \|a^6 \ a^7 \ a^8 \ a^9 \ a^{10}\|$  bildet. Aus diesem Tableau gewinnt man in der üblichen Weise nach zwei Schritten das Optimum-Tableau Nr. I. 42/, 50/

Im ursprünglichen  $c = (0, v)$  wurde  $v = e = (1, 1, 1)$  gewählt.

Optimum-Tableau I

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^1$                  | $t^2$                  | $t^3$        | $t^6$            | $t^7$ |
|-------------|-----------------------|-------|------------------------|------------------------|--------------|------------------|-------|
| 1           | 8                     | 1/2   | -1/2                   | 3/2                    | 0            | 1/2              | 0     |
| 1           | 9                     | 1     | 0                      | 0                      | 2            | 0                | 1     |
| 1           | 10                    | 0     | 1                      | -1                     | -1           | 0                | 0     |
| 0           | 4                     | 1/2   | 1/2                    | 1/2                    | 0            | 1/2              | 0     |
| 0           | 5                     | 1/2   | -1/2                   | 1/2                    | 2            | -1/2             | 1     |
| $c_B T - c$ |                       | -     | $v_3 - \frac{1}{2}v_1$ | $\frac{3}{2}v_1 - v_3$ | $2v_2 - v_3$ | $\frac{1}{2}v_1$ | $v_2$ |

$$v^1 = (1, 1, 1); \quad \hat{x}^1 = (\hat{w}^1; \hat{y}^1) = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0; \frac{1}{2}, 1, 0).$$

Zum Extrempunkt  $\hat{x}^1$  gehören drei weitere Basen zu je fünf Vektoren  $a^j$  und entsprechend drei weitere Tableaus, von denen eines sogleich als Optimum-Tableau Nr. II erhalten wird. Tableau Nr. I zeigt, daß durch Variation von  $v_1 = c_8$  oder  $v_3 = c_{10}$  Optimum-Tableaus mit neuer Basis gefunden werden können. Erhöht man etwa  $v_1$  auf den Wert 2, so wird  $c_B t^{j*} - c_{j*}$  mit

Optimum-Tableau II

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^2$ | $t^3$                    | $t^6$            | $t^7$ | $t^{10}$               |
|-------------|-----------------------|-------|-------|--------------------------|------------------|-------|------------------------|
| 2           | 8                     | 1/2   | 1     | -1/2                     | 1/2              | 0     | 1/2                    |
| 1           | 9                     | 1     | 0     | 2                        | 0                | 1     | 0                      |
| 0           | 1                     | 0     | -1    | -1                       | 0                | 0     | 1                      |
| 0           | 4                     | 1/2   | 1     | 1/2                      | 1/2              | 0     | -1/2                   |
| 0           | 5                     | 1/2   | 0     | 3/2                      | -1/2             | 1     | 1/2                    |
| $c_B T - c$ |                       | -     | $v_1$ | $-\frac{1}{2}v_1 + 2v_2$ | $\frac{1}{2}v_1$ | $v_2$ | $\frac{1}{2}v_1 - v_3$ |

$$v^2 = (2, 1, 1); \quad \hat{x}^2 = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0; \frac{1}{2}, 1, 0)$$

$j^* = 1$  gleich Null, und der Vektor  $a^1$  ersetzt nach den Regeln (4-21) bis (4-23) den Vektor  $a^{10}$  in der Basis  $A_B$ . Aus (4-22)

Optimum-Tableau III

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^2$ | $t^5$                             | $t^6$                             | $t^7$                             | $t^{10}$                                    |
|-------------|-----------------------|-------|-------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------|
| 4           | 8                     | $2/3$ | 1     | $1/3$                             | $1/3$                             | $1/3$                             | $2/3$                                       |
| 1           | 9                     | $1/3$ | 0     | $-4/3$                            | $2/3$                             | $-1/3$                            | $-2/3$                                      |
| 0           | 1                     | $1/3$ | -1    | $2/3$                             | $-1/3$                            | $2/3$                             | $(4/3)$                                     |
| 0           | 4                     | $1/3$ | 1     | $-1/3$                            | $2/3$                             | $-1/3$                            | $-2/3$                                      |
| 0           | 3                     | $1/3$ | 0     | $2/3$                             | $-1/3$                            | $2/3$                             | $1/3$                                       |
| $c_B^T - c$ |                       | -     | $v_1$ | $\frac{1}{3}v_1 - \frac{4}{3}v_2$ | $\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$ | $\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2$ | $\frac{2}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2$<br>$-v_3$ |

$$v^3 = (4, 1, 1); \quad \hat{x}^3 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0).$$

Optimum-Tableau IV

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^1$                                   | $t^2$                                            | $t^5$                  | $t^6$                                   | $t^7$            |
|-------------|-----------------------|-------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------|------------------|
| 4           | 8                     | $1/2$ | $-1/2$                                  | $3/2$                                            | 0                      | $1/2$                                   | 0                |
| 1           | 9                     | $1/2$ | $1/2$                                   | $-1/2$                                           | -1                     | $1/2$                                   | 0                |
| 2           | 10                    | $1/4$ | $3/4$                                   | $-3/4$                                           | $(1/2)$                | $-1/4$                                  | $1/2$            |
| 0           | 4                     | $1/2$ | $1/2$                                   | $1/2$                                            | 0                      | $1/2$                                   | 0                |
| 0           | 3                     | $1/4$ | $-1/4$                                  | $1/4$                                            | $1/2$                  | $-1/4$                                  | $1/2$            |
| $c_B^T - c$ |                       | -     | $\frac{1}{2}(v_2 - v_1)$<br>$+(3/4)v_3$ | $\frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$<br>$-(3/4)v_3$ | $\frac{1}{2}v_3 - v_2$ | $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$<br>$-(1/4)v_3$ | $\frac{1}{2}v_3$ |

$$v^4 = (4, 1, 2); \quad \hat{x}^4 = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}).$$

Optimum-Tableau V

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^1$                   | $t^2$                   | $t^6$            | $t^7$ | $t^{10}$     |
|-------------|-----------------------|-------|-------------------------|-------------------------|------------------|-------|--------------|
| 4           | 8                     | $1/2$ | $-1/2$                  | $3/2$                   | $1/2$            | 0     | 0            |
| 1           | 9                     | 1     | 2                       | -2                      | 0                | 1     | 2            |
| 0           | 5                     | $1/2$ | $3/2$                   | $-3/2$                  | $-1/2$           | 1     | 2            |
| 0           | 4                     | $1/2$ | $1/2$                   | $1/2$                   | $1/2$            | 0     | 0            |
| 0           | 3                     | 0     | -1                      | $(1)$                   | 0                | 0     | -1           |
| $c_B^T - c$ |                       | -     | $2v_2 - \frac{1}{2}v_1$ | $\frac{3}{2}v_1 - 2v_2$ | $\frac{1}{2}v_1$ | $v_2$ | $2v_2 - v_3$ |

$$v^5 = (4, 1, 2); \quad \hat{x}^5 = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0; \frac{1}{2}, 1, 0).$$

Optimum-Tableau VI

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^1$ | $t^3$                   | $t^6$            | $t^7$ | $t^{10}$               |
|-------------|-----------------------|-------|-------|-------------------------|------------------|-------|------------------------|
| 4           | 8                     | 1/2   | 1     | -3/2                    | 1/2              | 0     | 3/2                    |
| 3           | 9                     | 1     | 0     | 2                       | 0                | 1     | 0                      |
| 0           | 5                     | 1/2   | 0     | 3/2                     | -1/2             | 1     | 1/2                    |
| 0           | 4                     | 1/2   | 1     | -1/2                    | 1/2              | 0     | 1/2                    |
| 0           | 2                     | 0     | -1    | 1                       | 0                | 0     | -1                     |
| $c_B T - c$ |                       | -     | $v_1$ | $2v_2 - \frac{3}{2}v_1$ | $\frac{1}{2}v_1$ | $v_2$ | $\frac{3}{2}v_1 - v_3$ |

$$v^6 = (4, 3, 2); \quad \hat{x}^6 = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0; \frac{1}{2}, 1, 0).$$

Optimum-Tableau VII

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^1$            | $t^3$        | $t^6$            | $t^7$ | $t^8$                  |
|-------------|-----------------------|-------|------------------|--------------|------------------|-------|------------------------|
| 6           | 10                    | 1/3   | 2/3              | -1           | 1/3              | 0     | 2/3                    |
| 3           | 9                     | 1     | 0                | 2            | 0                | 1     | 0                      |
| 0           | 5                     | 1/3   | -1/3             | 2            | -2/3             | 1     | -1/3                   |
| 0           | 4                     | 1/3   | 2/3              | 0            | 1/3              | 0     | -1/3                   |
| 0           | 2                     | 1/3   | -1/3             | 0            | 1/3              | 0     | 2/3                    |
| $c_B T - c$ |                       | -     | $\frac{2}{3}v_3$ | $2v_2 - v_3$ | $\frac{1}{3}v_3$ | $v_2$ | $\frac{2}{3}v_3 - v_1$ |

$$v^7 = (4, 3, 6); \quad \hat{x}^7 = (0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0; 0, 1, \frac{1}{3}).$$

Optimum-Tableau VIII

| $c_B$       | Basis<br>$B(\hat{x})$ | $t^0$ | $t^1$                             | $t^5$                  | $t^6$            | $t^7$            | $t^8$                                   |
|-------------|-----------------------|-------|-----------------------------------|------------------------|------------------|------------------|-----------------------------------------|
| 6           | 10                    | 1/2   | 1/2                               | 1/2                    | 0                | 1/2              | 1/2                                     |
| 3           | 9                     | 2/3   | 1/3                               | -1                     | 2/3              | 0                | 1/3                                     |
| 0           | 7                     | 1/6   | -1/6                              | 1/2                    | -1/3             | 1/2              | -1/6                                    |
| 0           | 4                     | 1/3   | 2/3                               | 0                      | 1/3              | 0                | -1/3                                    |
| 0           | 2                     | 1/3   | -1/3                              | 0                      | 1/3              | 0                | 2/3                                     |
| $c_B T - c$ |                       | -     | $\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$ | $\frac{1}{2}v_2 - v_3$ | $\frac{1}{2}v_1$ | $\frac{1}{2}v_3$ | $\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{2}v_3 - v_1$ |

$$v^8 = (4, 3, 6); \quad \hat{x}^8 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0; 0, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}).$$

und (4-23) ergibt sich das Optimum-Tableau Nr. II. Aus diesem Tableau gewinnt man nach den Regeln der Spiralmethode eindeutig das Optimum-Tableau Nr. III, aus diesem wiederum eindeutig das Optimum-Tableau Nr. IV. Die parametrischen Variationen von  $v$  und die den Tableaus zugrunde liegenden Extrempunkte  $\hat{x}$  sind jeweils unterhalb der Tableaus angegeben. Aus dem Optimum-Tableau Nr. IV ergibt sich nach Schritt (2a) der Spiralmethode ohne Parametervariation das Optimum-Tableau Nr. V, welches dem bereits bekannten Extrempunkt  $\hat{x}^1$  zugehört. Daraus ergibt sich eindeutig das Optimum-Tableau Nr. VI und aus diesem die Tableaus VII und VIII.

Vom Tableau Nr. VIII aus ist keine neue Basis mehr bestimmbar. Geht man nach Schritt (3) der Spiralmethode die Optimum-Tableaus in der Reihenfolge ihrer Notierung zurück, so erkennt man, daß sich von ihnen aus keine unbekannte Optimum-Basis mehr bilden läßt. Die Spiralmethode bricht daher ab.

4.2.3 Die Vollständigkeit der gefundenen fünf Lösungen läßt sich im vorliegenden Beispiel leicht dadurch nachprüfen, daß man für jedes Optimum-Tableau  $T$  die Menge

$$(4-29) \quad V_T(\hat{x}) = \left\{ c = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \mid v \geq 0, c_B T \geq c, B = B(\hat{x}) \right\}$$

explizite bestimmt. Man erkennt dann, daß die Vereinigung sämtlicher acht Mengen  $V_T(\hat{x})$  den nichtnegativen Oktanten  $E_3^+$  des Raumes  $E_3$  überdeckt. Mit Hilfe der Spiralmethode ist also über alle  $c = (0, v)$  mit  $v > 0$  parametrisch programmiert worden. <sup>51/</sup> Die folgende Zeichnung (S. 98) veranschaulicht die Überdeckung von  $E_3^+$  für den Schnitt  $v_3 = 1$ .

Aus den effizienten Extrempunkten  $\hat{x} \in \hat{X}^e$  des kanonischen Maximumproblems ergeben sich unmittelbar die effizienten Extrempunkte  $\hat{y} \in \hat{Y}^e$  des ursprünglichen Produktionsraumes  $Y$ . Gemäß 5.1.6 ist die Menge  $Y^e$  der effizienten Produktionsergebnisse die Vereinigung der beiden Punktmengen

$$(4-30) \quad Y_1^e = \left\{ \begin{pmatrix} y_F \\ y_P \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$(4-31) \quad Y_2^e = \left\{ \begin{pmatrix} y_F \\ y_P \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/2 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \\ \dots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei in beiden Mengen  $\lambda_i \geq 0$  und  $\sum_i \lambda_i = 1$  sein muß. Die

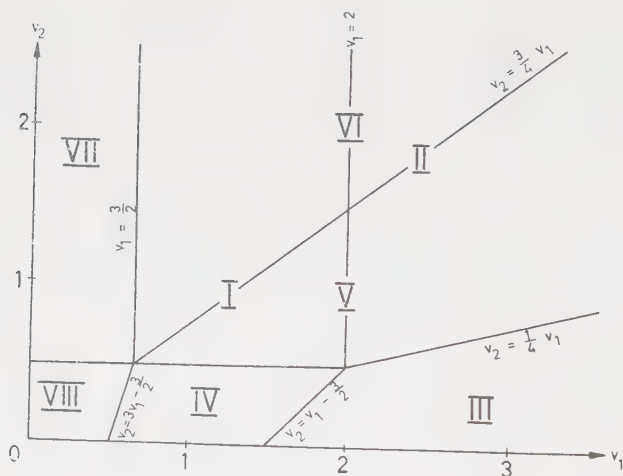


Abb. 2: Optimumpreise  $v \in V_T(\hat{x})$   
für  $v_3 \equiv 1$

(Tableaus Nr. I bis VIII)

Effizienz der Elemente der Menge  $Y_1^e$  prüft man mittels des Satzes 3.1 an Hand der Schattenpreise  $\bar{v} = \bar{p}_F = (2, 1/2, 1)$  und  $\bar{p}_I = (1, 1/2)$ , diejenige der Elemente der Menge  $Y_2^e$  an Hand der Schattenpreise  $\bar{v} = \bar{p}_F = (2/3, 1/2, 1)$  und  $\bar{p}_P = (1/3, 1/2)$  nach. Die Schattenpreise der Produktionsfaktoren sind in der Zeile  $c_B$  I-c der Simplex-Tableaus in den Spalten  $t^6$  und  $t^7$  ablesbar.

## Kapitel 5

### Vektor-Maxima und Dualität in der nichtlinearen

#### (konkaven) Programmierung

#### 5.1 Das nichtlineare Vektor-Maximum-Problem und zugehörige Extremalprobleme

5.1.1 In diesem Kapitel werden die zur Behandlung nichtlinearer prozeßanalytischer Produktionsmodelle erforderlichen, unter dem Namen "nichtlineare Programmierung" bekannten mathematischen Hilfsmittel systematisch und in strenger Begründung dargestellt. Im einzelnen werden das Vektor-Maximum-Problem, das Sattelwertproblem und allgemeine Dualitätssätze erörtert.

5.1.2 Die  $r$ -dimensionale vektorielle Funktion  $f(x)$  und die  $s$ -dimensionale vektorielle Funktion  $g(x)$  seien in einer (nichtleeren) Teilmenge  $\Omega$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E_n$  definiert. Die Menge der primal zulässigen Vektoren  $x \in E_n$  werde durch den Ausdruck

$$(5-1) \quad X = X(g|\Gamma) = \{x \mid g(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma\},$$

erklärt, worin  $\Gamma$  eine (nichtleere) Teilmenge von  $\Omega$  bedeutet.<sup>52/</sup> Wir betrachten im folgenden drei miteinander verknüpfte Extremalprobleme.

Problem I (Vektor-Maximum-Problem): Ermittle die im Sinne der Definition 1.1 maximalen Elemente  $\bar{d}$  der Menge

$$(5-2) \quad D = \{d \mid d = f(x), \quad x \in X(g|\Gamma)\}.$$

Als Lösung dieses Problems werden die Vektoren  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  bezeichnet, für welche  $\bar{d} = f(\bar{x})$  maximal auf  $D$  ist. Ist  $f(x)$  eine skalare Funktion ( $r=1$ ), so erhält man ein gewöhnliches Maximumproblem mit Nebenbedingungen.

5.1.3 Besitzen die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\Omega$  erste partielle Ableitungen, so verstehe man im Einklang mit 0.2.5 unter  $F(x)$  die  $r \times n$ -Matrix  $\left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right\|$ , unter  $G(x)$  die  $s \times n$ -Matrix  $\left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right\|$  und unter  $R$  die Menge der dual zulässigen Vektortripel  $(x, u, v)$

$$(5-3) \quad R = R(f, g | \Omega) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \mid u G(x) + v F(x) \leq 0, u \geq 0, v > 0, x \in \Omega \right\}.$$

Dem Problem I wird folgendes Vektor-Minimum-Problem zugeordnet:

Problem II (Vektor-Minimum-Problem): Ermittle die im Sinne der Definition 1.1 minimalen Elemente  $\bar{h}$  der Menge

$$(5-4) \quad H = \left\{ h \mid u(g(x) - G(x)x) + v(f(x) - F(x)x) \leq vh, \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \in R \right\}.$$

Als Lösung des Problems II werden die Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega)$  bezeichnet, welchen ein minimales Element  $\bar{h}$  aus  $H$  zugeordnet ist.

In Abschnitt 5.3 wird gezeigt, daß das Problem II unter gewissen Voraussetzungen dual zum Problem I ist, d.h., wenn der Vektor  $\bar{x}$  eine Lösung des Problems I darstellt, so existieren Vektoren  $(\bar{u}, \bar{v})$  derart, daß  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine Lösung des Problems II ergibt, und wenn  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine Lösung des Problems II bedeutet, so bildet  $\bar{x}$  auch eine Lösung des Problems I. In beiden Fällen gilt überdies  $\bar{v}\bar{d} = \bar{v}\bar{h}$ , wenn  $\bar{d}$  und  $\bar{h}$  den Lösungen entsprechende extremale Elemente von  $D$  und  $H$  bezeichnen.

5.1.4 Die Bedeutung des Problems II wird am besten an Hand von Spezialfällen erörtert. Zunächst sei bemerkt, daß die Probleme I-L und II-L der linearen Programmierung (vgl. 2.2.1, S. 42) in der gegenwärtigen Formulierung enthalten sind. Setzt man  $\Omega = E_n$  und  $\Gamma = E_n^+$  sowie  $f(x) = Cx$  und  $g(x) = b - Ax$ , so reduziert sich das Problem I auf das Problem I-L und das Problem II wegen  $F(x) = C$  und  $G(x) = -A$  auf das Problem II-L. Die besondere Einfachheit des dualen Problems II im Falle linearer Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  beruht darauf, daß dann die

Matrizen  $F(x)$  und  $G(x)$  unabhängig von der Variablen  $x$  sind, die gerade die hauptsächlichen Schwierigkeiten des nichtlinearen Falles verursacht.

Ein anderer Spezialfall, der bereits die wesentlichen Komplikationen des nichtlinearen Dualitätsproblems aufweist, ergibt sich, wenn  $g(x) = b - Ax$  gewählt wird,  $f(x)$  jedoch nichtlinear sein darf. Das Problem II hat dann das Aussehen:

Bestimme die minimalen Elemente  $\bar{h}$  der Menge

$$(5-5) \quad H = \left\{ h \mid ub + v(f(x) - F(x)x) \leq vh, \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \in R \right\},$$

worin

$$(5-6) \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \mid uA - vF(x) \geq 0, u \geq 0, v > 0, x \in \Omega \right\}.$$

Ein Sonderfall dieses Spezialfalles, der große praktische Bedeutung besitzt, ist die quadratische Programmierung, bei der zusätzlich  $\Omega = E_n$  und  $\Gamma = E_n^+$  sowie  $f(x) = cx + \frac{1}{2} x C x$  gewählt wird, worin  $c$  einen  $n$ -dimensionalen Vektor und  $C$  eine symmetrische, negativ semi-definite  $n \times n$ -Matrix darstellen. Die Probleme I und II lauten dann:

Maximiere die (reelle) Funktion

$$(5-7) \quad f(x) = cx + \frac{1}{2} x C x$$

bezüglich der Nebenbedingungen

$$(5-8) \quad Ax \leq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

bzw.

Minimiere die (reelle) Funktion

$$(5-9) \quad h(x, u) = ub - \frac{1}{2} x C x, \quad v \equiv 1,$$

bezüglich der Nebenbedingungen

$$(5-10) \quad uA - Cx \geq c \quad \text{und} \quad u \geq 0. \quad 53/$$

Ist  $C = 0$ , so gewinnt man die beiden Probleme der skalaren linearen Programmierung. Man beachtet, daß bei quadratischen

Programmen die Probleme I und II vom gleichen Typ sind, nämlich quadratische Zielfunktionen und lineare Restriktionen besitzen. Freilich ermangelt selbst ihnen die Symmetrie des linearen Falles.

5.1.5 Die bis heute wichtigste Methode zur Untersuchung des Vektor-Maximum-Problems besteht in der Zurückführung dieses Problems auf ein unter allgemeinen Bedingungen äquivalentes Sattelwertproblem des folgenden Typs.

Problem III (Sattelwertproblem): Ermittle ein Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{x} \in \Gamma$ ,  $\bar{u} \geq 0$ ,  $\bar{v} \geq 0$ , so daß die sog. Lagrangesche Form

$$(5-11) \quad \phi(x, u, v) = v f(x) + u g(x)$$

für dieses Vektortripel in  $x$  und  $u$  einen Sattelwert besitzt, d.h. daß

$$(5-12) \quad \phi(x, \bar{u}, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, u, \bar{v}) \quad \text{für alle } x \in \Gamma \text{ und alle } u \geq 0$$

gilt.

Ein Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{x} \in \Gamma$ ,  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} \geq 0$ , für das (5-12) gilt, heißt eine Lösung des Problems III. Eine Lösung mit  $\bar{v} > 0$  wird strenge Lösung des Problems III genannt. Im Falle einer skalaren Zielfunktion  $f(x)$  (also  $r=1$ ) ist jede Lösung zugleich eine strenge Lösung des Problems III.

Man bemerkt, daß das Problem III eine unmittelbare Verallgemeinerung des Problems III-L darstellt (vgl. 2.2.1, S. 47).

5.1.6 Eine Begründung für den Ausdruck "Sattelwertproblem" liefert der

Satz 5.1: Existiert eine Lösung  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  des Problems III, so gilt

$$(5-13) \quad \max_{x \in \Gamma} \inf_{u \geq 0} \phi(x, u, \bar{v}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = \min_{u \geq 0} \sup_{x \in \Gamma} \phi(x, u, \bar{v}).$$

Beweis.

Für die reelle Funktion  $\phi(x, u, \bar{v})$  gilt offenkundig

$$(5-14) \quad \inf_u \sup_x \phi(x, u, \bar{v}) \geq \sup_x \inf_u \phi(x, u, \bar{v}) .$$

Andererseits ist nach (5-12)

$$(5-15) \quad \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = \max_x \phi(x, \bar{u}, \bar{v}) = \min_u \phi(\bar{x}, u, \bar{v})$$

und daher

$$(5-16) \quad \inf_u \sup_x \phi(x, u, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \sup_x \inf_u \phi(x, u, \bar{v}) .$$

Es folgt in Verbindung mit (5-14), daß in (5-16) die Gleichheitszeichen gelten müssen und daß das Infimum der Suprema und das Supremum der Infima in  $\bar{x}$  und  $\bar{u}$  angenommen werden, q.e.d.

5.1.7 Der überwiegende Teil der bisher erzielten Resultate der nichtlinearen Programmierung ist an die Voraussetzung konkaver Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  gebunden. Im folgenden werden die in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften dieser Funktionen angegeben; wegen weiterer Eigenschaften wird z.B. auf Karlin <sup>54/</sup> verwiesen.

Definition 5.1: Eine (vektorielle) Funktion  $h(x)$  heißt in einer konvexen Menge  $\Lambda \subseteq E_n$  konkav, wenn für alle Elemente  $x, x' \in \Lambda$  und beliebiges  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  die Ungleichung

$$(5-17) \quad h(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda h(x) + (1-\lambda) h(x')$$

gilt. Ist in (5-17) für  $x \neq x'$  das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ( $>$ ), so heißt  $h(x)$  streng konkav in  $\Lambda$ .

Gleichwertig gilt:

$$(5-18) \quad h(\sum_i \lambda_i x^i) \geq \sum_i \lambda_i h(x^i) \quad \text{für } x^i \in \Lambda, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$$

( $i = 1, 2, \dots, p$ ).

Beispiel: Jede lineare Funktion  $h(x) = q - Qx$  ist konkav in  $E_x$ .

Lemma 5.1: Ist  $h(x)$  konkav in einer konvexen Menge  $\Lambda$  und in einem Punkt  $x' \in \Lambda$  differenzierbar <sup>55/</sup>, so gilt für alle  $x \in \Lambda$

$$(5-19) \quad h(x) - h(x') \leq H(x')(x - x'),$$

wobei  $H(x') = \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{x=x'}.$

Beweis.

Umformung von (5-17) ergibt

$$(5-20) \quad h(x) - h(x') \leq \frac{h(x' + \lambda(x - x')) - h(x')}{\lambda}.$$

Nach Annahme existiert in  $x'$  die Richtungsderivierte von  $h(x)$  in der Richtung  $dx = x - x'$  für beliebiges  $x \in \Lambda$ . Für  $\lambda \rightarrow 0$  erhält man daher (5-19), q.e.d.

Lemma 5.2: Ist  $h(x)$  konkav in einer konvexen Menge  $\Lambda$ , so ist die Menge

$$(5-21) \quad M = \{x \mid h(x) \geq z, x \in \Lambda\}$$

für beliebiges  $z$  konvex.

Beweis.

Es sei  $x, x' \in M$ . Für  $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)x'$ ,  $0 < \lambda < 1$ , gilt  $\bar{x} \in \Lambda$  und nach (5-17)

$$(5-22) \quad h(\bar{x}) \geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(x') \geq \lambda z + (1-\lambda)z.$$

Es folgt  $\bar{x} \in M$ , q.e.d.

Lemma 5.3: Sind die Funktionen  $h^i(x)$ ,  $i=1,2,\dots,p$ , konkav in einer konvexen Menge  $\Lambda$ , so ist auch die Funktion

$$(5-23) \quad h(x) = \sum_i \alpha_i h^i(x), \quad \alpha_i \geq 0,$$

konkav in  $\Lambda$ .

Beweis.

Für irgendzwei Punkte  $x, x' \in \Lambda$ , beliebiges  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  und jedes  $i=1,2,\dots,p$  gilt

$$(5-24) \quad \alpha_i h^i(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda(\alpha_i h^i(x)) + (1-\lambda)(\alpha_i h^i(x')) .$$

Durch Summation über  $i$  erhält man die Ungleichung (5-23),  
q.e.d.

## 5.2 Das Sattelwerttheorem von Kuhn / Tucker

5.2.1 In Abschnitt 5.2 wird die in 5.1.5 angedeutete Zurückführung des Problems I auf das Problem III unter verschiedenen Bedingungen vorgenommen. Zuerst werden zwei Hilfssätze bewiesen, die eine Verallgemeinerung des Lemmas 1.3 auf den Fall konkaver Funktionen darstellen.

Lemma 5.4: Die Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  seien in einer Menge  $\Omega$  definiert und in einer konvexen Teilmenge  $\Gamma \subseteq \Omega$  konkav. Besitzen die Ungleichungen

$$(5-25) \quad g(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad h(x) \geq 0$$

keine gemeinsame Lösung in  $\Gamma$  und gibt es einen Vektor  $x^0$  aus  $\Gamma$  mit  $g(x^0) > 0$ , so existieren Vektoren  $\bar{v} \geq 0$  und  $\bar{u} \geq 0$ , so daß

$$(5-26) \quad \bar{u} g(x) + \bar{v} h(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

gilt.

Beweis.

Man definiere die (nichtleere) Menge

$$(5-27) \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mid \lambda \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \text{ für ein } x \in \Gamma, \lambda \geq 0 \right\} .$$

Wegen der Konvexität von  $\Gamma$  und der Konkavität von  $g(x)$  und  $h(x)$  stellt  $K$  einen konvexen Kegel dar. Wegen (5-25) enthält  $K$  keinen Punkt der Menge  $P = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mid y > 0, z > 0 \right\}$ . Infolgedessen ergibt sich nach Lemma 1.9 die Existenz eines Vektorpaares  $(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$ , für das

$$(5-28) \quad \bar{u} g(x) + \bar{v} h(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

gilt. Wäre nun  $\bar{v} = 0$ , so würde aus  $x^0 \in \Gamma$  und  $g(x^0) > 0$  die Beziehung  $\bar{u} = 0$  im Widerspruch zu  $(\bar{u}, \bar{v}) \neq 0$  folgen, q.e.d.

Das Lemma 5.4 ist etwas unbefriedigend, da es wegen der Hypothese  $g(x^0) > 0$  für ein  $x^0 \in \Gamma$  keine Restriktionen der Art  $g_k(x) = 0$  bei linearen Funktionen  $g_k$  zuläßt. <sup>56/</sup> Uzawa hat es daher unternommen, diese Hypothese des Lemmas 5.4 abzuschwächen. <sup>57/</sup> Dies führt zum Hilfssatz von 5.2.2.

5.2.2 Man bilde die Zerlegung  $g(x) = (g^L(x), g^N(x))$ , wobei  $g^L$  die in  $\Omega$  linearen und  $g^N$  die nichtlinearen Komponenten von  $g$  repräsentieren möge. Ferner sei  $\begin{pmatrix} x \\ g^L(x) \end{pmatrix} = Qx + q$ , und in der Zerlegung  $Q = \begin{pmatrix} Q^* \\ Q^{**} \end{pmatrix}$  bedeute  $Q^*$  die Teilmatrix maximal möglicher Ordnung, für die  $Q^*x + q^* = 0$  für alle  $x \in X = X(g|\Gamma)$  gilt.

Lemma 5.5: Die Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  seien in  $\Omega = E_n$  definiert und konkav, und die Ungleichungen

$$(5-30) \quad g(x) \geq 0 \text{ und } h(x) \geq 0$$

mögen keine gemeinsame Lösung in  $\Gamma = E_n^+$  besitzen. Existiert dann ein Vektor  $x^0 \in X$  mit  $g^N(x^0) > 0$  und sind die Zeilenvektoren der Matrix  $Q^*$  positiv unabhängig (vgl. 1.1.4, S.14), so existieren Vektoren  $\bar{v} \geq 0$  und  $\bar{u} \geq 0$  derart, daß

$$(5-31) \quad \bar{u}g(x) + \bar{v}h(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in \Gamma = E_n^+$$

gilt.

Beweis.

Man definiere die Menge

$$(5-32) \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \lambda \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} t \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ für ein } x \in E_n, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Ganz entsprechend wie im Beweise zum Lemma 5.4 wird man zur Existenz eines Vektortripels  $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}) \geq 0$  geführt, für das

$$(5-33) \quad \bar{w}x + \bar{u}g(x) + \bar{v}h(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in E_n$$

gilt. Man bilde die den vor Lemma 5.5 eingeführten Zerlegungen entsprechenden Aufteilungen  $\bar{u} = (\bar{u}^L, \bar{u}^N)$  und  $\bar{p} = (\bar{p}^L, \bar{p}^N) = (\bar{p}^*, \bar{p}^{**})$ . Wäre nun  $\bar{v} = 0$ , so würde aus  $x^0 \in X$  und  $g^N(x^0) > 0$  wegen (5-33)  $\bar{u}^N = 0$  folgen. Ist die Matrix  $Q^{**}$  nicht leer, so ergibt sich aus ihrer Definition die Existenz eines Vektors  $\hat{x} \in X$  mit  $Q^{**}\hat{x} + q^{**} > 0$  (vgl. Bemerkung 1 von 5.2.3) und daher  $\bar{p}^{**} = 0$ . Demnach müßte  $\bar{p}^*(Q^*x + q^*) \leq 0$  für alle  $x \in E_n$  und  $\bar{p}^* \geq 0$  sein. Hieraus folgt  $\bar{p}^*Q^* = 0$  im Widerspruch zur positiven Unabhängigkeit der Zeilen von  $Q^*$ . Es ist also  $\bar{v} \geq 0$ . Für  $x \geq 0$  gewinnt man aus (5-33) zudem die Ungleichung (5-31), q.e.d.

Das Lemma 5.5 hat den Nachteil, daß  $g(x)$  und  $h(x)$  im ganzen Raum  $E_n$  definiert und konkav sein müssen, was in vielen wirtschaftstheoretischen Anwendungen nicht zutrifft.

5.2.3 Die Voraussetzung, daß ein  $x^0 \in X(g|\Gamma)$  mit  $g(x^0) > 0$  bzw.  $g^N(x^0) > 0$  existiert, wurde von Slater eingeführt. 58/

Definition 5.2: Eine Funktion  $h(x)$ , für die ein  $x^0$  aus einer Teilmenge  $\Lambda$  des Definitionsbereichs von  $h$  existiert, so daß  $h(x^0) > 0$  ist, heißt Slater-regulär, kurz: S-regulär in  $\Lambda$ .

Bemerkung 1: Die Funktion  $g(x)$  bzw.  $g^N(x)$  ist S-regulär in  $X$ , wenn zu jeder Komponente von  $g(x)$  bzw.  $g^N(x)$  ein Vektor  $x^j \in X$  mit  $g_j(x^j) > 0$  bzw.  $g_j^N(x^j) > 0$  vorhanden ist. Wählt man  $\lambda_j > 0$  mit  $\sum_j \lambda_j = 1$ , so ergibt sich wegen der Konkavität der Funktionen  $g$  bzw.  $g^N$  und der Konvexität von  $X = X(g|\Gamma)$

$$(5-34) \quad g(\sum_j \lambda_j x^j) \geq \sum_j \lambda_j g(x^j) > 0 \quad \text{bzw.} \quad g^N(\sum_j \lambda_j x^j) \geq \sum_j \lambda_j g^N(x^j) > 0$$

und mithin  $x^0 = \sum_j \lambda_j x^j$ .

Bemerkung 2: Es ist oft wichtig zu wissen, ob  $\bar{v}$  oder eine Komponente  $\bar{v}_j$  dieses Vektors positiv ist.  $\bar{v}_j$  ist positiv, wenn ein Vektor  $x^j \in X(g|\Gamma)$  derart existiert, daß  $g(x^j) > 0$

bzw.  $g^N(x^j) > 0$  und außerdem  $e^k h(x^j) > 0$  für alle  $k \neq j$  ist.  
Der Beweis ist offenkundig.

5.2.4 Die Lemmata 5.4 und 5.5 bilden die Grundlage für den Beweis des folgenden Sattelpunkttheorems von Kuhn / Tucker in der Fassung von Uzawa: 59/

Satz 5.2 (Sattelpunkttheorem): Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in einer Menge  $\Omega$  in  $E_n$  definiert;  $\Gamma$  sei eine Teilmenge von  $\Omega$ .

- (a) Ist  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine strenge Lösung des Problems III, so ist  $\bar{x}$  eine Lösung des Problems I.
- (b)  $\Gamma$  sei eine konvexe Menge, und  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in ihr konkav. Ist  $g(x)$  überdies in  $X(g|\Gamma)$  S-regulär, so existiert zu jeder Lösung  $\bar{x}$  des Problems I ein Vektorpaar  $(\bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} \geq 0$ , so daß  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine Lösung des Problems III darstellt.

Beweis.

- (a) Aus der rechten Ungleichung (5-12) folgt  $\bar{u} g(\bar{x}) = 0$  und  $g(\bar{x}) \geq 0$ , also  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$ . Aus der linken Ungleichung (5-12) ergibt sich für sämtliche  $x \in X(g|\Gamma)$  wegen  $\bar{u} \geq 0$  und  $g(x) \geq 0$  die Beziehung  $\bar{v} f(x) \leq \bar{v} f(\bar{x})$ . Wäre nun für ein  $x^* \in X(g|\Gamma)$  die Ungleichung  $f(x^*) \geq f(\bar{x})$  erfüllt, so würde wegen  $\bar{v} > 0$  ein Widerspruch resultieren.  $\bar{x}$  löst also das Problem I.

- (b) Ist  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  eine Lösung des Problems I und setzt man  $h(x) = f(x) - f(\bar{x})$ , so besitzen die Ungleichungen

$$(5-35) \quad g(x) \geq 0 \text{ und } h(x) \geq 0$$

in  $\Gamma$  keine gemeinsame Lösung. Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas 5.4 erfüllt. Es existieren also Vektoren  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} \geq 0$  mit der Eigenschaft, daß

$$(5-36) \quad \bar{v} f(x) + \bar{u} g(x) \leq \bar{v} f(\bar{x}) \text{ für alle } x \in \Gamma$$

gilt. Wegen  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  gilt für alle  $u \geq 0$  die Ungleichung

$u g(\bar{x}) \geq 0$  und wegen  $\bar{u} g(\bar{x}) \leq 0$  (aus (5-36)) auch die Gleichung  $\bar{u} g(\bar{x}) = 0$ . Es resultiert

$$(5-37) \quad \bar{v} f(x) + \bar{u} g(x) \leq \bar{v} f(\bar{x}) + \bar{u} g(\bar{x}) \leq \bar{v} f(\bar{x}) + u g(\bar{x})$$

für alle  $x \in \Gamma$  und alle  $u \geq 0$ , q.e.d.

Bemerkung. Bedient man sich anstelle der Definition 1.1 des allgemeineren Begriffs der Slater-Maximalität in Definition 1.2, so erkennt man, daß unter den Bedingungen des Theorems 5.2(b) die Existenz einer Lösung des Problems III notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung des Problems I ist.

Es wurde verschiedentlich bemerkt<sup>60/</sup>, daß die in Satz 5.2(b) geforderte S-Regularität der vollen Funktion  $g(x)$  eine zu einschränkende Bedingung ist. Es wird daher noch eine auf dem Lemma 5.5 beruhende Modifikation des Sattelwerttheorems angegeben.

Satz 5.2(b\*): Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in  $\Omega = E_n$  definiert und konkav. Ferner sei  $\Gamma = E_n^+$ , und der Teilvektor  $g^N(x)$  von  $g(x)$  besitze in  $X(g|\Gamma)$  die S-Regularität. Dann existieren zu jeder Lösung  $\bar{x}$  des Problems I Vektoren  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} \geq 0$ , so daß  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine Lösung des Problems III darstellt.

Beweis.

Falls die Matrix  $Q^*$  nichtleer sein sollte, darf stets unterstellt werden, daß sie nur positiv unabhängige Zeilenvektoren enthält. Wäre etwa ihre  $i$ -te Zeile  $e^i Q^*$  von den übrigen Zeilen positiv abhängig, etwa  $e^i Q^* = \sum_j \lambda_j e^j Q^*$  mit  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j \neq i$ , so würde wegen  $Q^* \bar{x} + q^* = 0$  für  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  die Beziehung  $q_i^* = \sum_j \lambda_j q_j^*$ ,  $j \neq i$ , folgen. Jedes  $x$ , welches die Gleichungen  $e^j Q^* x + q_j^* = 0$ ,  $j \neq i$ , erfüllt, muß zwangsläufig auch der  $i$ -ten Gleichung  $e^i Q^* x + q_i^* = 0$  genügen. Die Restriktionsmenge  $X(g|\Gamma)$  bleibt also unverändert, wenn man in  $Q^* x + q^*$  sämtliche Komponenten streicht, für die der Koeffizientenvektor von  $x$  von den restlichen Zeilen von  $Q^*$  positiv abhängig ist. Für das

so modifizierte Problem I läßt sich durch Anwendung des Lemmas 5.5 unmittelbar eine Lösung des Sattelwertproblems nachweisen (vgl. den Beweis zu Satz 5.2(b)). Nachträglich können sodann diejenigen gestrichenen Komponenten von  $Q^*x + q^*$ , die in  $g^L(x)$  enthalten sind, in die Sattelwertbedingung (5-12) bzw. (5-37) eingeführt werden, indem man die ihnen entsprechenden Komponenten von  $\bar{u}^L$  gleich Null setzt, q.e.d.

5.2.5 Für wirtschaftstheoretische Anwendungen ist die Charakterisierung der Lösungen des Problems III durch marginale Bedingungen bedeutsam. Es werden daher noch die "lokalen" Sattelwertbedingungen von Kuhn / Tucker <sup>61/</sup> angegeben.

Satz 5.3 (Kuhn / Tucker): Die Funktion  $\phi(x, u, v)$  sei in einer Menge  $\Lambda = \Omega \times E_s^+ \times E_r^+$  mit  $\Omega \subseteq E_n$  definiert und dort differenzierbar in den Variablen  $x$  und  $u$ . Ferner sei  $\Delta = \Gamma \times E_s^+ \times E_r^+$  mit  $\Gamma \subseteq \Omega$ .

(a) Ist  $\Gamma$  konvex, so erfüllt jede Lösung  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  des Problems III die marginalen Bedingungen

$$(5-38) \quad \bar{\phi}_x(x - \bar{x}) \equiv \left\| \frac{\partial \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})}{\partial x} \right\| (x - \bar{x}) \leq 0 \text{ für alle } x \in \Gamma$$

und

$$(5-39) \quad \bar{\phi}_u \equiv \left\| \frac{\partial \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})}{\partial u} \right\| \geq 0; \quad \bar{u} \cdot \bar{\phi}_u = 0.$$

(b) Ist  $\Gamma$  konvex,  $\phi(x, u, \bar{v})$  bezüglich  $x$  konkav in  $\Delta$  und  $-\phi(x, u, \bar{v})$  bezüglich  $u$  konkav in  $\Delta$ , so ist jeder Punkt  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{x} \in \Gamma$ ,  $\bar{u} \geq 0$ ,  $\bar{v} \geq 0$ , in welchem die Bedingungen (5-38) und (5-39) erfüllt sind, eine Lösung des Problems III.

Beweis.

(a) Aus  $\phi(x, \bar{u}, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  für jedes  $x \in \Gamma$  folgt  $\bar{\phi}_x(x - \bar{x}) \leq 0$ . Aus  $\phi(\bar{x}, u, \bar{v}) \geq \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  resultiert für alle  $u \in E_r^+$  die Ungleichung  $\bar{\phi}_u(u - \bar{u}) \geq 0$  und daher  $\bar{\phi}_u \geq 0$ . Ferner wegen  $\bar{\phi}_u \cdot \bar{u} \geq 0$  und  $-\bar{\phi}_u \cdot \bar{u} \geq 0$  zudem  $\bar{\phi}_u \cdot \bar{u} = 0$ .

(b) Nach Lemma 5.1 gilt für alle  $x \in \Gamma$

$$(5-40) \quad \phi(x, \bar{u}, \bar{v}) - \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \leq \bar{\phi}_x(x - \bar{x}) \leq 0$$

und für alle  $u \in E_n^+$

$$(5-41) \quad \phi(\bar{x}, u, \bar{v}) - \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \geq \bar{\phi}_u(u - \bar{u}) = \bar{\phi}_u \cdot u \geq 0,$$

q.e.d.

Bemerkung 1. Es sei  $\Gamma \subseteq \Omega \cap E_n^+$ . Dann läßt sich in Satz 5.3(a) die Annahme, daß  $\Gamma$  konvex sei, durch die Voraussetzung, daß  $\Gamma$  offen auf  $E_n^+$  gelegen sei, und die Bedingung (5-38) durch die Bedingungen

$$(5-42) \quad \bar{\phi}_x \leq 0; \quad \bar{x} \cdot \bar{\phi}_x = 0$$

ersetzen. Der Beweis ist offenkundig.

Bemerkung 2. Die Funktion  $\phi(x, u, v)$  braucht nicht die spezielle Darstellung (5-11) zu besitzen. Hat sie jedoch diese Form, so erfüllt sie die in Satz 5.3 geforderten Eigenschaften, wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\Omega$  definiert und differenzierbar und, für den Teil (b) des Theorems, in  $\Gamma \subseteq \Omega$  konkav sind. Da  $\phi$  in  $u$  linear ist, stellt  $-\phi$  eine in  $u$  konkave Funktion dar.

Bemerkung 3. Der Ausdruck "lokale" Sattelwertbedingungen erklärt sich daraus, daß man im Satz 5.3 für  $\Gamma$  eine offene Umgebung  $U(x, \delta)$  von  $\bar{x}$  wählen kann. Die Bedingungen (5-38) und (5-39) charakterisieren dann einen im  $x$ -Teil lokalen Sattelwert der Funktion  $\phi$ . (Die Einschränkung von  $u$  auf lokale Variationen ist gleichfalls möglich.)

Als Korollar ergibt sich aus den Sätzen 5.2 und 5.3 folgender

Satz 5.4 (Kuhn/Tucker): Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in einer Menge  $\Omega$  in  $E_n$  definiert und differenzierbar und in einer konvexen Untermenge  $\Gamma$  von  $\Omega$  konkav.

(a) Sind die Bedingungen

$$(5-43) \quad (\bar{v} F(\bar{x}) + \bar{u} G(\bar{x}))(x - \bar{x}) \leq 0 \text{ für alle } x \in \Gamma$$

und

$$(5-44) \quad \bar{u} g(\bar{x}) = 0$$

für ein Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$ ,  $\bar{u} \geq 0$ ,  $\bar{v} > 0$  erfüllt, so ist  $\bar{x}$  eine Lösung des Problems I.

- (b) Ist  $g(x)$  in  $X(g|\Gamma)$  S-regulär, so existieren zu jeder Lösung  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  Vektoren  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} \geq 0$ , so daß die Bedingungen (5-43) und (5-44) befriedigt sind.

#### Beweis.

Verknüpfung von Satz 5.3(b) und 5.2(a) sowie Satz 5.2(b) und 5.3(a) liefert den Beweis unmittelbar.

Die Bedingungen (5-43) und (5-44) sind in der Literatur als Bedingungen von Kuhn / Tucker, kurz: K-T-Bedingungen, bekannt. Für viele Anwendungen nützlich ist der Umstand, daß die Bedingungen (5-43) und (5-44) auch dann noch notwendig für die Existenz einer Lösung  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  des Problems I sein können, wenn weder  $f(x)$  oder  $g(x)$  konkav noch  $g(x)$  S-regulär in  $X$  sind. Diese Aussagen werden in Abschnitt 5.3 präzisiert.

5.2.6 Sattelwertprobleme sind seit der Entwicklung der Spieltheorie durch von Neumann und Morgenstern (1943) Gegenstand der mathematischen Wirtschaftstheorie. Die Reduktion des Maximum-Problems I auf das Sattelwertproblem III wurde erstmals von Kuhn / Tucker<sup>62/</sup> durchgeführt, die insbesondere den Satz 5.2 für differenzierbare konkave Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  (unter einer etwas anderen Regularitätsbedingung, der in 5.3.4 einzuführenden K-T-Regularität) bewiesen haben. Die den Hilfssätzen 5.4 und 5.5 zugrunde liegenden Voraussetzungen sowie die Beweise des Lemmas 5.5 ab Formel (5-33) und des Satzes 5.2 stammen im wesentlichen von Uzawa<sup>63/</sup>, der auf einer früheren Arbeit von Slater<sup>64/</sup> aufbaut. Arrow / Hurwicz<sup>65/</sup> haben die Zurückführung des Problems I auf ein modifiziertes Sattelwertproblem (für den Fall  $r=1$ ) ohne die Annahme konkaver Funktionen vorgenommen; jedoch kann auf ihre etwas verwickel-

ten, nur lokal gültigen Resultate hier nicht eingegangen werden.

Die hier gegebenen Beweise der Lemmata 5.4 und 5.5 beruhen in ihrem ersten Teil, etwas abweichend von dem seit Uzawa üblichen Verfahren, auf der Dualitätstheorie konvexer Kegel, also auf den Eigenschaften der Richtungsderivierten allgemeiner konkaver Funktionen. Dieses Vorgehen wurde bereits von Kuhn / Tucker<sup>66/</sup> vorgeschlagen, jedoch nicht näher ausgeführt. Die für ökonomische Anwendungen wichtige Unterscheidung von expliziten und impliziten Restriktionen wird in der Literatur im allgemeinen nicht getroffen. Eine Ausnahme bildet z.B. Karlin<sup>67/</sup>, der allerdings nicht ausdrücklich auf die Bedeutung dieser Unterscheidung eingeht.

### 5.3 Dualität in der nichtlinearen Programmierung

5.3.1 Aufgabe des Abschnitts 5.3 ist es zu zeigen, daß das Problem II unter gewissen verhältnismäßig schwachen Annahmen dual zum Problem I ist. Die bisher aufgefundenen Dualitätssätze sind an die Voraussetzung konkaver Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  gebunden. Die Schwierigkeit der Behandlung nichtlinearer dualer Probleme beruht darauf, daß das Problem II im allgemeinen weder der konkaven noch der konvexen Programmierung angehört, selbst wenn das Problem I nur (streng) konkave Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  enthält. Lediglich in einigen Spezialfällen - z.B. bei linearen und quadratischen Programmen - besteht eine Dualität in dem Sinne, daß das duale Problem konvex ist, wenn das primale Problem konkav ist, und umgekehrt.

Die erwähnte Schwierigkeit bedingt, daß für die Behandlung nichtlinearer Dualitätsprobleme nur marginale Beweismethoden, also Verfahren, die auf Differenzierbarkeitseigenschaften der auftretenden Funktionen beruhen, in Frage kommen. Im allgemeinen ist es daher nicht möglich, unspezifizierte implizite Restriktionen der Art  $x \in \Gamma$  ( $\Gamma$  unspezifiziert) zuzulassen.

5.3.2 Folgende Hilfssätze sind für spätere Erörterungen unerlässlich. Die im Lemma 5.6 auftretende Menge  $R_x(f, g|\Omega)$  bezeichnet die Punktmenge, die durch orthogonale Projektion von  $R(f, g|\Omega)$  bezüglich  $x$  in den Raum  $E_n$  entsteht.

Lemma 5.6: Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in einer konvexen Menge  $\Omega$  definiert und differenzierbar (vgl. Anm. 55) und in der konvexen Hülle <sup>68/</sup> der Vereinigung der Mengen  $X(g|\Gamma)$  und  $R_x(f, g|\Omega)$  konkav; ferner sei  $\Gamma \subseteq E_n^+$ . Für alle  $d \in D$  und alle  $h \in H$  gilt dann  $d \nmid h$ .

Beweis.

Man wähle irgendein  $d^0 \in D$  mit zugehörigem  $x^0 \in X(g|\Gamma)$  und ein  $h^* \in H$  mit zugehörigem  $(x^*, u^*, v^*) \in R(f, g|\Omega)$ . Da nach Annahme  $f(x)$  und  $g(x)$  differenzierbar und konkav sein sollen, gelten nach Lemma 5.1 folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} (5-45) \quad v^* h^* &\geq u^* (g(x^*) - G(x^*)x^*) + v^* (f(x^*) - F(x^*)x^*) \\ &\geq u^* (g(x^0) - G(x^*)x^0) + v^* (f(x^0) - F(x^*)x^0) \\ &\geq u^* g(x^0) + v^* f(x^0) \geq v^* f(x^0) = v^* d^0. \end{aligned}$$

Wäre nun die Beziehung  $d^0 \geq h^*$  erfüllt, so würde im Widerspruch zu (5-45) die Ungleichung  $v^* d^0 > v^* h^* \geq v^* d^0$  folgen; q.e.d.

Lemma 5.7: Ist unter den Annahmen des Lemmas 5.6 ein Vektor  $d^0$  sowohl Element von  $D$  als auch von  $H$ , so ist  $d^0$  maximal auf  $D$  und minimal auf  $H$ .

Beweis.

Aus  $d^0 \in H$  folgt nach Lemma 5.6 für alle  $d \in D$  die Beziehung  $d \nmid d^0$ . Damit ist  $d^0$  maximal auf  $D$ . Aus  $d^0 \in D$  folgt umgekehrt für alle  $h \in H$  die Beziehung  $h \nmid d^0$ . Demnach ist  $d^0$  minimal auf  $H$ , q.e.d.

Lemma 5.8: Existiert zu einem Element  $d^0$  von  $D$  unter den Annahmen des Lemmas 5.6 ein Vektor  $h^*$  aus  $H$  mit der Eigenschaft, daß für ein diesem  $h^*$  zugeordnetes  $v^* > 0$  die Gleichung

chung  $v^*d^0 = v^*h^*$  gilt, so ist  $d^0$  maximal auf  $D$  und minimal auf  $H$ .

### Beweis.

Die Gleichung  $v^*d^0 = v^*h^*$  impliziert, daß  $d^0$  auch Element von  $H$  ist und Lemma 5.7 anwendbar ist, q.e.d.

5.3.3 Bevor die Dualitätstheoreme formuliert und bewiesen werden können, muß der Begriff der K-T-Regularität erläutert werden. Dies geschieht in 5.3.3 und 5.3.4.

Die (vektorielle) Funktion  $h(z)$  sei in einer Menge  $\Delta$ , welche die Menge

$$(5-46) \quad \chi = \chi(h, z) = \{ z \mid h(z) \geq 0, \quad z \geq 0 \}$$

enthält, definiert und differenzierbar. Für gegebenes  $\bar{z} \in \chi$  lassen sich sämtliche Vektoren  $z \in \chi$  und  $h = h(z)$  nach etwaiger Ummumerierung ihrer Komponenten wie folgt zerlegen:

$$(5-47) \quad z = (z^{(1)}, z^{(2)}), \quad \text{sofern} \quad \bar{z}^{(1)} = 0, \quad \bar{z}^{(2)} > 0,$$

$$(5-48) \quad h = (h^{(1)}, h^{(2)}), \quad \text{sofern} \quad \bar{h}^{(1)} = 0, \quad \bar{h}^{(2)} > 0.$$

Stellt  $z^{(1)}$  einen  $p$ -dimensionalen Teilvektor des etwa  $q$ -dimensionalen Vektors  $z$  dar, so bezeichnet  $I^{(1)}$  die  $p \times q$ -Matrix  $\| I_p \quad 0 \|$ . Im Einklang mit der bisherigen Schreibweise bedeutet

$$H^{(1)}(z) = \left\| \frac{\partial h^{(1)}(z)}{\partial z} \right\|_z.$$

Definition 5.3: Ein Vektor  $dz \in E_z$  heißt eingeschränkt bezüglich des Punktes  $\bar{z} \in \chi$ , wenn ein in der Menge  $\chi$  enthaltenes Kurvenstück ("contained path" <sup>69/</sup>)

$$(5-49) \quad K = \{ z \mid z = z(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \}$$

mit in  $\theta = 0$  differenzierbarer Parameterdarstellung  $z(\theta)$  derart existiert, daß  $\bar{z} = z(0)$  und  $dz = Z(0) \delta\theta$  für ein  $\delta\theta > 0$  gilt, worin  $Z = \|\partial z / \partial \theta\|$  gesetzt ist.

Geometrisch gesprochen, ist ein Vektordifferential  $dz$  dann eingeschränkt, wenn es eine Richtung definiert, die vom Punkt

$\bar{z}$  aus in die Menge  $\chi$  weist.

Bemerkung 1. Ist  $\bar{z} \in \chi$  ein innerer Punkt von  $\chi$ , so sind alle  $dz \in E_z$  eingeschränkt. Ist nämlich eine Umgebung  $U(\bar{z}, \delta)$  von  $\bar{z}$  in  $\chi$  enthalten, so läßt sich zu jedem  $dz \in E_z$  ein so kleines  $\lambda > 0$  bestimmen, daß  $\bar{z} + \lambda dz \in U(\bar{z}, \delta)$  gilt. Das Kurvenstück  $K = \{z \mid z = \bar{z} + \theta \lambda dz, 0 \leq \theta \leq 1\}$  besitzt dann die geforderten Eigenschaften für  $\delta\theta = 1/\lambda$ .

Bemerkung 2. Liegt der Punkt  $\bar{z}$  auf dem Rand von  $\chi$ , so sind höchstens solche Vektoren  $dz \in E_z$  eingeschränkt, die den Ungleichungen

$$(5-50) \quad H^{(1)}(\bar{z}) dz \geq 0, \quad I^{(1)} dz \geq 0$$

genügen. Wäre nämlich z.B. für eine Komponente  $e^{iH^{(1)}} dz < 0$  und  $dz$  trotzdem eingeschränkt, so würde für hinreichend kleines  $\theta > 0$  die Ungleichung  $e^{i[h^{(1)}(z(\theta)) - h^{(1)}(z(0))]} < 0$ , d.h.  $e^{i h^{(1)}(z(\theta))} < 0$ , im Widerspruch zur Annahme  $z(\theta) \in \chi$  resultieren. Ein entsprechender Schluß gilt für  $I^{(1)} dz$ .

Bemerkung 3. Aus den Bemerkungen 1 und 2 ergibt sich, daß ein bezüglich  $\bar{z}$  in der Menge  $\chi(h^{(1)}, z^{(1)})$  eingeschränkter Vektor  $dz \in E_z$  auch in der Menge  $\chi(h, z)$  bezüglich  $\bar{z}$  eingeschränkt ist.

5.3.4 Kuhn/Tucker 70/ haben nachgewiesen, daß nicht alle Vektoren  $dz \in E_z$ , die den Ungleichungen (5-50) genügen, bezüglich des Punktes  $\bar{z} \in \chi$  eingeschränkt sein müssen. Die Hinlänglichkeit der Bedingung (5-50) für die Eingeschränktheit von  $dz$  muß als besondere Regularitätsannahme postuliert werden.

Definition 5.4: Wir sagen, die Funktion  $h(z)$  sei im Punkte  $\bar{z} \in \chi$  Kuhn-Tucker-regulär, kurz: K-T-regulär, wenn jeder Vektor  $dz \in E_z$ , welcher den Ungleichungen (5-50) genügt, bezüglich des Punktes  $\bar{z} \in \chi$  eingeschränkt ist. 71/

Bemerkung 1. Eine lineare Funktion  $h(z) = q - Qz$  ist in allen Punkten  $z \in \chi(h, z)$  K-T-regulär. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Bemerkung 2. Ist  $h(z)$  eine differenzierbare, konkave, auf  $\chi(h, z)$  S-reguläre Funktion, so ist  $h(z)$  in jedem Punkte  $z \in \chi$  K-T-regulär. <sup>72/</sup>

Bemerkung 3. Eine weitere, von Arrow / Hurwicz <sup>73/</sup> aufgefundene, für die K-T-Regularität hinreichende und leicht anwendbare Bedingung besteht darin, daß sich ein Teilvektor  $h^\oplus$  von  $h^{(1)}$  mit der Eigenschaft, daß  $\chi(h, z) = \chi(h^\oplus, h^{(2)}, z)$  gilt, derart bestimmen läßt, daß der Rang der Matrix

$$(5-54) \quad \left\| \frac{\partial h^\oplus(\bar{z})}{\partial z^{(2)}} \right\|$$

gleich der Dimension von  $h^\oplus$  ist.

5.3.5 Im Problem I seien die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in einer Menge  $\Omega \subseteq E_n$  definiert und differenzierbar. Ferner sei  $z = x$ ,  $h(z) = g(x)$  und  $\Gamma = E_n^+ \subseteq \Omega$ . Besitzt Problem I eine Lösung  $\bar{x} \in X(g|E_n^+)$ , so gilt für keinen eingeschränkten Vektor  $dx \in E_n$  die Ungleichung  $F(\bar{x}) dx > 0$ , denn sonst ließe sich ein hinreichend kleines  $\theta$  mit  $0 < \theta \leq 1$  derart bestimmen, daß für  $x(\theta) \in X$  die Ungleichung  $f(x(\theta)) - f(x(0)) > 0$  im Widerspruch zur Maximalität von  $f(\bar{x}) = f(x(0))$  gilt.

Darüber hinaus weisen die meisten Lösungen des Problems I die Eigenschaft auf, daß auch die Ungleichung  $F(\bar{x}) dx \geq 0$  für kein eingeschränktes  $dx \in E_n$  eine Lösung hat. Lösungen des Problems I mit dieser Eigenschaft heißen eigentliche Lösungen ("proper solutions" <sup>74/</sup>). Dagegen sind Lösungen des Problems I, für welche die Ungleichung  $F(\bar{x}) dx \geq 0$  durch ein eingeschränktes  $dx$  erfüllbar ist und die, wie Kuhn / Tucker gezeigt haben <sup>75/</sup>, tatsächlich vorhanden sein können, ausgerollt in dem Sinne, daß sich durch eine hinreichend kleine Bewegung vom Lösungspunkt  $\bar{x}$  aus entlang einem zulässigen Kurvenstück (contained path)  $x = x(\theta) \in X$  mindestens eine Kompen-

te von  $f(x)$  gegenüber  $f(\bar{x})$  um einen Zuwachs erster Ordnung erhöhen läßt, während die übrigen Komponenten höchstens einer Abnahme von zweiter oder höherer Ordnung unterliegen. Solche Fälle ausgearteter Vektor-Maxima werden bei Anwendung marginaler Methoden in der Regel ausgeschlossen.

Lemma 5.9: Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in einer Menge  $\Omega$  definiert und differenzierbar. Ferner sei  $\Gamma = E_n^+ \subseteq \Omega$ , und die Restriktionen des Problems I seien im Punkte  $\bar{x} \in X(g|E_n^+)$  K-T-regulär. Ist  $\bar{x}$  dann eine eigentliche Lösung des Problems I, so existieren Vektoren  $\bar{u} \geq 0$  und  $\bar{v} > 0$ , welche die Bedingungen (5-43) und (5-44) befriedigen.

Beweis. 76/

Da  $\bar{x}$  eine eigentliche Lösung des Problems I darstellt, so daß für kein eingeschränktes  $dx \in E_n$  die Ungleichung  $F(\bar{x}) dx \geq 0$  gilt, und da die Restriktionen des Problems I im Punkte  $\bar{x}$  K-T-regulär sind, besitzen die Ungleichungen

$$(5-55) \quad F(\bar{x}) dx \geq 0, \quad G^{(1)}(\bar{x}) dx \geq 0, \quad I^{(1)} dx \geq 0$$

keine gemeinsame Lösung  $dx \in E_n$ . (Die zweite und/oder dritte Ungleichung von (5-55) können eventuell leer sein.) Nach dem Lemma 1.5 gibt es also Vektoren  $\bar{u}^{(1)} \geq 0$ ,  $\bar{w}^{(1)} \geq 0$  und  $\bar{v} > 0$  mit der Eigenschaft

$$(5-56) \quad \bar{u}^{(1)} G^{(1)}(\bar{x}) + \bar{v} F(\bar{x}) + \bar{w}^{(1)} I^{(1)} = 0.$$

Setzt man  $\bar{w} = \bar{w}^{(1)} I^{(1)}$  und ergänzt man  $\bar{u}^{(1)}$  durch Einführung eines Vektors  $\bar{u}^{(2)} = 0$  zu dem s-dimensionalen Vektor  $\bar{u} = (\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)})$ , so erhält man aus (5-56)

$$(5-57) \quad \bar{u} G(\bar{x}) + \bar{v} F(\bar{x}) = -\bar{w} \leq 0.$$

Mittels der Zerlegungen (5-47) und (5-48) für  $z=x$  und  $h=g$  ergibt sich zusammen mit der Definition von  $\bar{u}$  und  $\bar{w}$

$$(5-58) \quad \bar{w} \bar{x} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{u} g(\bar{x}) = 0.$$

Aus (5-57) und (5-58) folgt die Behauptung, q.e.d.

Bemerkung 1. Sind die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  linear, etwa  $f(x) = Cx$  und  $g(x) = b - Ax$ , so ist jede Lösung  $\bar{x}$  des Problems I eine eigentliche Lösung, woraus in Verbindung mit Bemerkung 1 in 5.3.4 resultiert, daß die Annahmen des Lemmas 5.9 von selbst erfüllt sind. In der Tat, gälte unter der Linearitätsannahme die Ungleichung  $F(\bar{x}) d\hat{x} \geq 0$  für eine Lösung  $\bar{x}$  und eingeschränktes  $d\hat{x}$ , so ließe sich nach Bemerkung 1 von 5.3.4  $\lambda d\hat{x} = \hat{x} - \bar{x}$  mit einem  $\hat{x} \in X$  und einem  $\lambda > 0$  schreiben und wegen  $F(x) = 0$  ergäbe sich  $f(\hat{x}) \geq f(\bar{x})$  im Widerspruch zur Maximalität von  $f(\bar{x})$ .

Bemerkung 2. Fordert man im Lemma 5.9 nur, daß  $\bar{x} \in X$  eine Lösung des Problems I (nicht unbedingt eine eigentliche Lösung) darstellt, so bleibt die Behauptung des Lemmas mit der Maßgabe richtig, daß  $\bar{v} \geq 0$  ist. Der Beweis ergibt sich aus Lemma 1.2, sei hier aber übergangen.

Bemerkung 3. Ist über die Annahmen des Lemmas 5.9 hinaus noch die Voraussetzung erfüllt, daß  $f(x)$  und  $g(x)$  konkav auf  $\Gamma = E_n^+$  sind, so folgt aus Lemma 5.9 und Satz 5.3, daß jede (eigentliche) Lösung  $\bar{x} \in X(g|E_n^+)$  des Problems I den  $x$ -Teil einer (strengen) Lösung  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  des Problems III darstellt. Die Bedingungen (5-57) und (5-58) ergeben zusammen mit der Ungleichung  $g(\bar{x}) \geq 0$  die explizite Darstellung der Bedingungen (5-39) und (5-42).

5.3.6 Satz 5.5 (Erstes Dualitätstheorem): Über die Annahmen des Lemmas 5.9 hinaus sei noch die Voraussetzung erfüllt, daß  $\Omega$  konvex ist und  $f(x)$  und  $g(x)$  in der konvexen Hülle der Vereinigung der Mengen  $X(g|\Gamma)$  und  $R_x(f, g|\Omega)$  konkav sind. Ist dann  $\bar{x} \in X(g|\Gamma)$  eine eigentliche Lösung des Problems I, so existiert eine Lösung  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  des Problems II und  $\bar{h}$  läßt sich zu  $\bar{d} = f(\bar{x})$  bestimmen.

Beweis.

Die nach Lemma 5.9 vorhandenen Vektoren  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  ergeben auf Grund von (5-57) zusammen mit  $\bar{x}$  ein dual zulässiges Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g|\Omega)$ , und der Vektor  $\bar{d} = f(\bar{x})$  ist

wegen (5-57) und (5-58) in der Menge  $H$  enthalten. Nach Lemma 5.7 ist  $\bar{d}$  minimal auf  $H$ , das Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  daher eine Lösung des Problems II, q.e.d.

Bemerkung. Im Hinblick auf die Bemerkung 1 von 5.3.5 ist der Dualitätssatz 2.1(a) (Notwendigkeit) ein Spezialfall des Satzes 5.5. Die Hinlänglichkeit der Bedingung des Satzes 2.1(a) ist als Sonderfall im Lemma 5.7 enthalten.

5.3.7 Die dem Satz 2.1.b (Notwendigkeit) entsprechende Umkehrung des Satzes 5.5 erfordert etwas verwickeltere Überlegungen und gewisse zusätzliche Voraussetzungen.

Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  seien in einer konvexen Menge  $\Omega$  definiert und differenzierbar, und die Funktion  $m(x, u, v) = uG(x) + vF(x)$  sei in  $\Omega \times E_S^+ \times E_r^+$  bezüglich  $x$  differenzierbar. Für  $f(x)$  und  $g(x)$  ist immer eine Aufspaltung

$$(5-59) \quad f(x) = f^N(x^N) + f^L(x^L) \quad \text{mit} \quad f^L(x^L) = Cx^L,$$

$$(5-60) \quad g(x) = g^N(x^N) + g^L(x^L) \quad \text{mit} \quad g^L(x^L) = b - Ax^L$$

möglich.<sup>77/</sup> Wir schreiben  $x = (x^N, x^L)$ , wobei die Dimension von  $x^N$  gleich  $n_N$  und diejenige von  $x^L$  gleich  $n_L$  sei,  $n_N + n_L = n$ . Bei nichtleerem Teilvektor  $x^L$  heißen  $f(x)$  und  $g(x)$  im Anschluß an Huard <sup>78/</sup> partiell linear, bei leerem Teilvektor  $x^N$  sind  $f(x)$  und  $g(x)$  linear. Bei nichtleerem Vektor  $x^L$  läßt sich die Definitionsmenge  $\Omega$  als Produkt  $\Omega_N \times E_{n_L}$  schreiben, da die linearen Teile von  $f(x)$  und  $g(x)$  im ganzen Raum  $E_{n_L}$  erklärt sind. Ferner schreiben wir

$$(5-61) \quad m^N(x^N, u, v) = uG^N(x^N) + vF^N(x^N).$$

Zunächst sei bemerkt, daß, wenn  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega)$  eine Lösung des Problems II darstellt, auch jedes Vektortripel  $(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\hat{x} = (\bar{x}^N, \hat{x}^L)$  bei beliebigem  $\hat{x}^L \in E_{n_L}$  eine Lösung des Problems II bildet. Auf Grund der Zerlegungen (5-59) und (5-60) wird das Problem II unabhängig vom Teilvektor  $x^L$

(vgl. hierzu 5.1.4). In den folgenden Überlegungen wählen wir o. B. d. A. für  $\bar{x}^L$  stets den Nullvektor 0 entsprechender Dimension und schreiben  $\bar{x} = (\bar{x}^N, 0)$ .

Es wird jetzt ein dem Problem II verwandtes skalares Minimum-Problem formuliert:

Problem II\*: Für gegebenes  $v^0 > 0$  ist die Funktion

$$(5-62) \quad \varphi(\bar{x}^N, u, w | v^0) = u(b + g^N(\bar{x}^N)) + w^N \bar{x}^N + w^L \cdot 0 + v^0 f^N(\bar{x}^N)$$

bezüglich der Restriktionen

$$(5-63) \quad u G^N(\bar{x}^N) + v^0 F^N(\bar{x}^N) + w^N = 0,$$

$$v^0 C - u A + w^L = 0,$$

$$(u, w) \geq 0, \quad \bar{x}^N \in \Omega_N$$

zu minimieren. Dabei wurde, der Zerlegung von  $x$  entsprechend,  $w = (w^N, w^L)$  gesetzt.

Die hier benötigte Verknüpfung zwischen dem Problem II und dem Problem II\* wird im folgenden Hilfssatz angegeben.

Lemma 5.10: Stellt das Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega)$  bzw. das Vektortripel  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega_N)$  eine Lösung des Problems II dar, so beschreibt das Vektortripel  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{w})$  mit  $\bar{w}^N = -m^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  und  $\bar{w}^L = \bar{u}A - \bar{v}C$  eine Lösung des Problems II\* für  $v^0 = \bar{v}$ .

Beweis.

Für kein Vektortripel  $(\bar{x}^N, u, w)$ , das die Restriktionen (5-63) erfüllt, kann unter unseren Annahmen die Ungleichung  $\varphi(\bar{x}^N, u, w | \bar{v}) < \varphi(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{w} | \bar{v})$  bestehen. Aus dieser Ungleichung würde nämlich bei Berücksichtigung von (5-63) und der Definition von  $\bar{w}$

$$(5-64) \quad ub + u(g^N(\bar{x}^N) - G^N(\bar{x}^N)\bar{x}^N) + \bar{v}(f^N(\bar{x}^N) - F^N(\bar{x}^N)\bar{x}^N)$$

$$< \bar{u}b + \bar{u}(g^N(\bar{x}^N) - G^N(\bar{x}^N)\bar{x}^N) + \bar{v}(f^N(\bar{x}^N) - F^N(\bar{x}^N)\bar{x}^N) \leq \bar{v} \bar{h}$$

folgen. Da für beliebiges  $\bar{x}^L$  ersichtlich  $(x, u, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega)$  ist, läßt sich demnach ein  $h^* \in H$  mit  $h^* \leq \bar{h}$  im Widerspruch zu der Tatsache bestimmen, daß  $\bar{h}$  ein minimales Element von  $H$  sein sollte, q.e.d.

5.2.8 Eine Lösung  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  mit  $\bar{v} \in \bar{V}$ ,  $\bar{v}^0 = 0$  des Problems II wird regulär genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a)  $\bar{x}^N$  ist ein innerer Punkt von  $\Omega_N$
- (b) Bei nichtleerem Vektor  $\bar{x}^N$  ist die quadratische Matrix

$$(5-65) \quad K^N(\bar{x}^N, u, v) = \left\| \frac{\partial}{\partial v^N} m^N(\bar{x}^N, u, v) \right\|$$

im Punkte  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  nichtsingulär, d.h. vom Range  $n_N$ .

- (c) Man setze in (5-47)  $z = (t^N, y^N, u, w)$ , worin  $t^N - y^N = \bar{x}^N$  mit  $t^N > 0$  und  $y^N > 0$  sei, definiere

$$(5-66) \quad h(z) = \begin{pmatrix} \pm (m^N(t^N - y^N, u, v^0) + w^N) \\ \pm (v^0 C - uA + w^L) \end{pmatrix}$$

und schreibe  $X \equiv R^*(v^0) = \{z \mid h(z) \geq 0, z \geq 0\}$ . Dann wird angenommen, daß  $h(z)$  im Punkte  $\bar{z} = (\bar{t}^N, \bar{y}^N, \bar{u}, \bar{w})$  mit  $\bar{w}^N = -m^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{w}^L = \bar{u}A - \bar{v}C$  und  $\bar{t}^N - \bar{y}^N = \bar{x}^N$  für  $v^0 = \bar{v}$  K-T-regulär ist.

5.3.9 Nach diesen Vorbereitungen können wir das folgende Theorem aussprechen:

Satz 5.6 (Duval, 1971) Sei  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine reguläre Lösung des Problems II,  $g(x)$  und  $m(x, u, v)$  sowie die Menge  $\Omega$  mögen die zu Anfang von 5.3.7 genannten Eigenschaften besitzen. Ferner sollen  $f(x)$  und  $g(x)$  in der konvexen Hülle der Vereinigung der Mengen  $X(g | \Gamma)$  und  $R_x(f, g | \Omega)$  konkav sein, und es sei  $\Gamma = E_n^+ \subseteq \Omega$ . Stellt dann das Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$  eine reguläre Lösung des Problems II dar, so existiert ein Vektor  $\hat{x}^L$  derart, daß

$\hat{x} = (\bar{x}^N, \hat{x}^L)$  eine Lösung des Problems I ist, und der Vektor  $\bar{d} = f(\hat{x}) = \bar{h}$  bildet ein Vektor-Maximum auf der Menge D und gleichzeitig ein Vektor-Minimum auf der Menge H.

Beweis. 72

Nach der Bemerkung vor Problem II\* (vgl. S.120-121) läßt sich jede Lösung  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega_0)$  des Problems II durch willkürliche Definition eines Vektors  $\hat{x}^L \in E_{n_L}$  zu einer Lösung  $(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g | \Omega)$  des Problems II erweitern.  $\hat{x}^L$  wird im Verlaufe des Beweises so konstruiert, daß  $\hat{x} = (\bar{x}^N, \hat{x}^L)$  eine Lösung des Problems I ergibt. Nach dem Lemma 5.40 ist  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{w})$  mit  $\bar{w}^N = -m^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  und  $\bar{w}^L = \bar{u}A - \bar{v}C$  für  $v^0 = \bar{v}$  eine Lösung des Problems II\*. Da  $\bar{x}^N$  nach Annahme (a) von 5.3.8 ein innerer Punkt der Menge  $\Omega_0$  ist, definiert der Vektor  $\bar{z} = (\bar{z}^N, \bar{y}^N, \bar{u}, \bar{w})$  mit  $\bar{x}^N = \bar{z}^N - \bar{y}^N$  und  $\bar{t}^N > 0$ ,  $\bar{y}^N > 0$  einen Punkt der Menge  $R^*(\bar{v})$ , in welchem die Funktion  $\phi$  aus (5-62) ein lokales Minimum in  $R^*(\bar{v})$  annimmt. Für alle bezüglich  $\bar{z}$  eingeschränkten Vektoren  $dz$  gilt infolgedessen

$$(5-67) \quad \Phi(\bar{t}^N - \bar{y}^N, \bar{u}, \bar{w}) dz \geq 0, \quad \text{worin } \Phi = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\|.$$

Nach der Regularitätsannahme (c) in 5.3.8 sind alle Vektoren  $dz$ , welche die Ungleichungen

$$(5-68) \quad H(\bar{z}) dz \geq 0, \quad I^{(1)} dz \geq 0$$

erfüllen, eingeschränkt. Setzt man  $dt^N - dy^N = dx^N$ , so lassen sich die Ungleichungen (5-67) und (5-68) dahin deuten, daß die Ungleichungen

$$(5-69) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \pm M^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) & \pm {}^T G^N(\bar{x}^N) & \pm I_{n_N} & 0 \\ 0 & \bar{t}^T A & 0 & \pm I_{n_L} \\ 0 & I_{\lambda}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mu}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\nu}^{(1)} \end{array} \right\| \cdot \begin{pmatrix} dx^N \\ du \\ dw^N \\ dw^L \end{pmatrix} \geq 0$$

und

$$(5-70) \quad - \left( m^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) + \bar{w}^N, \quad g^N(\bar{x}^N) + b, \quad \bar{x}^N, \quad 0 \right) \begin{pmatrix} dx^N \\ du \\ dw^N \\ dw^L \end{pmatrix} > 0$$

keine gemeinsame Lösung  $(dx^N, du, dw^N, dw^L)$  besitzen. Dabei bedeuten  $I_{n_N}$  bzw.  $I_{n_L}$  Einheitsmatrizen der Ordnung  $n_N \times n_N$  bzw.  $n_L \times n_L$  und

$$(5-71) \quad I_{\lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} I_{\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} I_{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} I_{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

worin  $\lambda = \dim \bar{u}^{(1)}$ ,  $\mu = \dim (\bar{w}^N)^{(1)}$  und  $\nu = \dim (\bar{w}^L)^{(1)}$  mit  $\bar{u}^{(1)}$  und  $\bar{w}^{(1)}$  aus der Zerlegung (5-47). Das den Matrizen in (5-69) vorangestellte  $T$  bezeichnet die Operation der Transposition.

Nach dem Lemma 1.5 existieren daher Vektoren  $\bar{r} \geq 0$ ,  $\bar{s}^N \geq 0$  und  $\bar{s}^L \geq 0$  sowie Vektoren  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$ , für die nach geeigneter Normierung folgende Gleichungen bestehen:

$$(5-72) \quad \bar{p} M^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) = m^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) + \bar{w}^N,$$

$$(5-73) \quad g^N(\bar{x}^N) \bar{p} - A \bar{q} + \bar{r} I_{\lambda}^{(1)} = g^N(\bar{x}^N) + b,$$

$$(5-74) \quad \bar{p} + \bar{s}^N I_{\mu}^{(1)} = \bar{x}^N, \quad \bar{q} + \bar{s}^L I_{\nu}^{(1)} = 0.$$

Da  $(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  eine reguläre Lösung des Problems II sein soll, folgt aus (5-72) nach Annahme (b) von 5.3.8 wegen Gleichung (5-63), die in der Form  $m^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v}) + \bar{w}^N = 0$  geschrieben werden kann, die Bedingung  $\bar{p} = 0$ . Aus (5-74) ergibt sich  $\bar{x}^N \geq 0$  und  $\bar{q} \leq 0$ . Definiert man nun  $\hat{x}^L = -\bar{q}$ , so beinhaltet (5-73) die Beziehungen  $g(\hat{x}) = g^N(\bar{x}^N) + (b - A \hat{x}^L) \geq 0$ . Es gilt also  $\hat{x} = (\bar{x}^N, \hat{x}^L) \in X(g|\Gamma)$  und  $f(\hat{x}) \in D$ .

$f(\hat{x})$  ist aber auch in  $H$  enthalten, denn aus

$$(5-75) \quad \bar{u} g(\hat{x}) = \bar{r} I_{\lambda}^{(1)} \bar{u} = 0, \quad \bar{w}^N \bar{x}^N = \bar{s}^N I_{\mu}^{(1)} \bar{w}^N = 0,$$

$$\bar{w}^L \hat{x}^L = \bar{s}^L I_{\nu}^{(1)} \bar{w}^L = 0$$

folgt für  $(\hat{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in R(f, g|\Omega)$

$$(5-76) \quad \bar{u}(g(\hat{x}) - G(\hat{x})\hat{x}) + \bar{v}(f(\hat{x}) - F(\hat{x})\hat{x}) = \bar{v}f(\hat{x}).$$

Nach dem Hilfssatz 5.7 ist  $f(\hat{x})$  ein maximales Element von  $D$  und zugleich ein minimales Element von  $H$ , q.e.d.

Bemerkung 1. Das Dualitätstheorem 5.1.0 (Notwendigkeit) ist ein Spezialfall des Satzes 5.6 ( $x^N$  leer).

Bemerkung 2. Die Annahme, daß  $M^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  nichtsingulär sei, ist erfüllt, wenn  $f^i(x^N)$  und  $g^k(x^N)$  konvex sind, stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in  $\Omega_N$  besitzen und entweder  $e^{iN}(x^N)$  für ein  $i=1,2,\dots,r$  in einer Umgebung von  $\bar{x}^N$  streng konvex oder  $e^{kN}(x^N)$  für ein  $k=1,2,\dots,s$  in einer Umgebung von  $\bar{x}^N$  streng konvex und  $\bar{u}_k > 0$  für dasselbe  $k$  ist. In beiden Fällen ist die Matrix  $M^N(\bar{x}^N, \bar{u}, \bar{v})$  negativ definit und damit nichtsingulär.

Bemerkung 3. Die in den Beweisen der Theoreme 5.5 und 5.6 auftretenden Vektoren  $(\bar{u}, \bar{v})$  können mit den in der Lösung des Problems III vorkommenden Vektoren  $(\bar{u}, \bar{v})$  identifiziert werden.

5.3.10 Dualitätsprobleme der in 5.3 erklärten Art wurden erstmals von Dennis<sup>80/</sup> und Dorn<sup>81/</sup> betrachtet. Wolfe<sup>82/</sup>, Hanson<sup>83/</sup> und Huard<sup>84/</sup> haben allgemeine Beweise für den Fall skalarer konvexer Zielfunktionen. Der Beweis des Satzes 5.6 in den Grundzügen von Huard<sup>85/</sup>, während der Beweis des Lemmas 5.9 eine unmittelbare Anwendung der Methode von Kuhn/Tucker<sup>86/</sup> ist. Die hier vorgeführte Verallgemeinerung auf vektorielle Zielfunktionen ist naheliegend.

Eine andere Art von Dualität baut auf der von Fenchel<sup>87/</sup> entwickelten Theorie der konjugiert-konvexen Funktionen auf. Ein Abriß der Theorie Fenchels findet sich bei Karlin<sup>88/</sup> und bei Whinston<sup>89/</sup>, der auch den Zusammenhang zwischen dem Dualitätstheorem von Fenchel und den Dualitätssätzen 5.5 und 5.6 für den Fall skalarer Zielfunktionen  $f(x)$  erörtert. Auf die Darstellung dieser Beiträge muß hier verzichtet werden.

## Kapitel 6

### Effizienz und Dualität im endlichen nichtlinearen Produktionsmodell

#### 6.1 Das endliche nichtlineare Produktionsmodell

6.1.1 In diesem Kapitel werden die mathematischen Ergebnisse des Kapitels 5 zur Beschreibung von Konstellationen optimaler Produktion und Faktorallokation herangezogen. In Abschnitt 6.1 werden die Grundannahmen über nichtlineare Technologien entwickelt. Der Abschnitt 6.2 ist der Herleitung allgemeiner Effizienzkriterien und des Existenzsatzes für effiziente Produktionsalternativen gewidmet. Die Abschnitte 6.3 und 6.4 enthalten Illustrationen des allgemeinen Modells und behandeln ökonomische Aspekte der "Faktorausbeutung" und der "Dezentralisation" im Zustand optimalen Faktoreinsatzes.

6.1.2 Wie in den Kapiteln 1 bis 3 wird eine abstrakte Wirtschaft betrachtet, in deren Wirtschaftsplan  $m$  Güter auftreten mögen, und zwar  $r$  Endprodukte und  $s$  Produktionsfaktoren ( $m = r + s$ ). Die technischen Möglichkeiten der Transformation von irgendwelchen Mengenkombinationen dieser  $m$  Güter in irgendwelche anderen Mengenkombinationen von finalen und/oder primären Gütern werden wie zuvor in einer technologischen Matrix zusammengestellt. Allgemeine Transformationsfunktionen  $f_i^j(x)$  bzw.  $g_k^j(x)$ , die in einer nichtleeren Menge  $\Omega \subseteq E_n$  erklärt seien, ersetzen die fixen Produktionskoeffizienten  $(a_F^j)_i$  bzw.  $(a_P^j)_k$  des linearen Modells. Die technologische Matrix lautet jetzt:

$$(6-1) \quad A(x) = \begin{bmatrix} A_F(x) \\ A_P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^j(x) \\ g_k^j(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,r \\ k=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix},$$

wobei  $j=1,2,\dots,n$  den Spaltenindex der Basisprozesse,  $i=1,2,$

..., r den Zeilenindex der Endprodukte und  $k=1,2,\dots,s$  den Zeilenindex der primären Güter bedeutet. Die Matrix  $A_F(x)$  der  $f$ 's ersetzt die Matrix  $A_F$  des linearen Modells, die Matrix  $A_P(x)$  der  $g$ 's die Matrix  $A_P$ . Negative Werte für  $f$  bzw.  $g$  bedeuten Inputs, positive Werte entsprechend Outputs der Produktion. Im Falle einer rein linearen Technologie hat man:

$$(6-2) \quad A(x) = \begin{vmatrix} (a_F^j)_i x_j \\ (a_P^j)_k x_j \end{vmatrix}$$

Demnach gilt in diesem Falle  $A_F x = A_F(x)e$ ,  $A_P x = A_P(x)e$  und  $Ax = A(x)e$ .

6.1.3 Wir beschränken die folgende Darstellung auf die Verallgemeinerung des Modells aus Kapitel 3. Zu Beginn der betrachteten Planperiode sollen in der abstrakten Wirtschaft Anfangsbestände  $z_P^0 \geq 0$  an primären Gütern zur Verfügung stehen, jedoch keine einsatzfähigen Bestände an finalen Gütern vorhanden sein. Treten also finale Güter als Inputs auf, so müssen die von ihnen benötigten Mengen im Zuge der laufenden Produktion anderweitig erzeugt werden. Bezeichnet  $\Gamma \subseteq \Omega$  die (nichtleere) Menge der technisch möglichen Prozeßgrade  $x$ , so kann die Wirtschaft unter den ihr auferlegten Gütererrestriktionen in der gegebenen Planperiode die Basisprozesse mit allen Intensitäten  $x$  betreiben, die der Menge

$$(6-3) \quad X = X(f, g, z_P^0 | \Gamma) = \left\{ x \mid \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) + z_P^0 \geq 0 \end{array}, x \in \Gamma \right\}$$

angehören, worin

$$(6-4) \quad f(x) = A_F(x)e = (\sum_j f_1^j(x), \dots, \sum_j f_r^j(x)),$$

$$(6-5) \quad g(x) = A_P(x)e = (\sum_j g_1^j(x), \dots, \sum_j g_s^j(x))$$

gesetzt ist. Die Elemente von  $X$  heißen zulässige Prozeßgrade. Der Produktionsraum  $Y$  wird durch den Ausdruck

$$(6-6) \quad Y = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_F \\ y_P \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} y_F = f(x) \\ y_P = g(x) \end{array}, x \in X(f, g, z_P^0 | \Gamma) \right\}$$

erklärt. Der Produktionsraum besteht nach dieser Definition nur aus den Gütermengenkombinationen  $y$ , die aus den exakten Transformationen  $y_F = f(x)$  und  $y_P = g(x)$  hervorgehen, obwohl höhere als die technisch notwendigen Inputs und geringere als die technisch möglichen Outputs bei unwirtschaftlicher Produktionsweise jederzeit auftreten können. Häufig empfiehlt sich daher folgende Definition des Produktionsraumes:

$$(6-7) \quad Y^* = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_F \\ y_P \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} f(x) \geq y_F, \quad y_F \geq 0 \\ g(x) \geq y_P, \quad y_P + z_P^0 \geq c \end{array}, x \in T \right\}.$$

Wir benutzen in diesem Abschnitt die Definition (6-6), weil die hier allein interessierenden effizienten Produktionsalternativen von  $Y^*$  ohnehin Randpunkte von  $Y^*$  sein müssen, von denen o. B. d. A. angenommen werden kann, daß sie in  $Y$  enthalten sind.

Der Teilraum  $Y_F$  der finalen Güter

$$(6-8) \quad Y_F = \{ y_F \mid y_F = f(x), x \in X(f, g, z_P^0 | \Gamma) \}$$

spielt wie bisher die wesentliche Rolle bei der Definition effizienter Produktionsalternativen.

Definition 6.1: Ein Punkt  $\bar{y} \in Y$  heißt effizient, wenn der Teilvektor  $\bar{y}_F$  aus der Zerlegung  $\bar{y} = (\bar{y}_F, \bar{y}_P)$  im Sinne der Definition 1.1 maximal auf  $Y_F$  ist.

Diese Definition der Effizienz beruht auf der aus Kapitel 3 bekannten Annahme, daß nur die finalen Güter unabgeleitet begehrt sind.

6.1.4 Über die technologische Produktionsstruktur werden folgende Mindestannahmen getroffen.

- T 1 a:  $\Omega \subseteq E_n$  und  $\Gamma \subseteq E_n^+ \cap \Omega$ ;  $\Gamma, \Omega$  nichtleer.  
 b:  $\Gamma$  ist konvex.  
 c:  $\Gamma$  ist abgeschlossen.

T 2 a: Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sind in  $\Omega$  definiert.  
 b:  $f(x)$  und  $g(x)$  sind konkav auf  $\Gamma$ .  
 c:  $f(x)$  und  $g(x)$  sind stetig auf  $\Gamma$ .

T 3 a: Es gilt  $0 \in \Gamma$ .  
 b: Es gilt  $f(0) = g(0) = 0$ .

T 4: Aus  $x \in \Gamma$  und  $f(x) = g(x) = 0$  folgt  $x = 0$ .

T 5: Für kein  $x \in \Gamma$  gilt  $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \geq 0$ .

T 6: Es existieren Vektoren  $x^i \in X$ ,  $i=1,2,\dots,r$ , so daß  $e^i f(x^i) > 0$  gilt.

T 6\*: Es existieren Vektoren  $x^i \in X$ ,  $i=1,2,\dots,r$ , so daß  $e^i f(x^i) > 0$  gilt, und Vektoren  $x^k \in X$ ,  $k=1,2,\dots,s$ , so daß  $e^k (g(x^k) + z_p^0) > 0$  gilt.

Bemerkung 1. Im gegenwärtigen Modell muß nicht  $\Gamma = E_n^+$  und  $\Omega = E_n$  sein, wie dies im linearen Modell stets vorausgesetzt wurde. Es sind Anwendungen des Produktionsmodells denkbar, in denen nicht sämtliche nichtnegativen Prozeßgradvektoren  $x \in E_n^+$  realisierbar sind, beispielsweise weil gewisse Kapazitätsbeschränkungen, die nicht explizite im Modell auftreten sollen oder mangels hinreichender quantitativer Information nicht spezifiziert werden können, einer Verwirklichung bestimmter Prozeßgradvektoren  $x \in E_n^+$  entgegenstehen. Ferner braucht  $\Gamma$  keine beschränkte Menge zu sein. Die Trennung von  $\Omega$  und  $\Gamma$  empfiehlt sich aus logischen wie expositorischen Gründen. In vielen Anwendungen wird freilich  $\Gamma = \Omega$  sein.

Die Annahme T 3 besagt, daß der Zustand völliger Nichtproduktion ohne irgendwelchen Güterverzehr, also ohne fixe reale Kosten, erreicht werden kann.

Bemerkung 2. Die Annahme T 2c ist für innere Punkte von  $\Gamma$  eine Konsequenz der Annahme T 2b; sie soll aus Gründen besserer Darstellung gesondert beibehalten werden. Die Konkavität der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  bedeutet, daß die Gesamtpro-

duktion des Systems durch nichtzunehmende Ertragszuwächse ("non-increasing returns to scale") gekennzeichnet ist. Das Gesetz des nichtzunehmenden Ertragszuwachses zeigt sich darin, daß bei Gültigkeit der Annahmen T 1a-b, T 2a-b und T 3 für jedes  $y = (f(x), g(x)) \in Y$  und alle reellen Zahlen  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  die Produktionsalternativen  $\alpha y$  im Raum  $Y^*$  enthalten sind. In der Tat sind nach Lemma 5.2 die Mengen  $X$  und  $Y^*$  konvex und enthalten den jeweiligen Koordinatenursprung. Zu jedem Produktionsergebnis  $\alpha y$  existiert mithin ein Vektor  $y' = (f(\alpha x), g(\alpha x)) \in Y$ , der  $\alpha y$  majorisiert,  $y' \geq \alpha y$ . Dies impliziert die Abwesenheit zunehmender Ertragszuwächse.

Bemerkung 3. Ausdrücklich sei darauf verwiesen, daß unter den Annahmen T 1a-b und T 2a-b der Produktionsraum  $Y^*$  aus (6-7) konvex ist. Diese Eigenschaft wird namentlich bei Existenzbeweisen der allgemeinen Gleichgewichtstheorie benötigt. Bei der Erörterung des Problems der Effizienz genügt die schwächere Annahme, die von der Menge  $Y$  aus (6-6) erfüllt wird, daß der Produktionsraum Teil des Randes einer konvexen Menge sei. Angemerkt sei auch, daß nicht die Stetigkeit und Konkavität der einzelnen Transformationsfunktionen  $f_i^j(x)$  und  $g_k^j(x)$  gefordert wird, sondern lediglich die Stetigkeit und Konkavität ihrer Summen (6-4) und (6-5).

6.1 5 Die Annahme T 5 entspricht der Annahme L 2 (vgl. S.14); es ist kein positiver Output für ein Gut ohne den Input mindestens eines anderen Gutes möglich. Die Annahme T 4 ist wesentlich für die Irreversibilität der Produktion (vgl. Annahme L 1, S.14).

Satz 6.1: Unter den Annahmen T 1a-b, T 2a-b und T 3 bis T 5 folgt: Wenn  $y = f$  und  $-y = f$  in der Lösung  $y = 0$ .

Beweis.

Es sei  $y = (f(x), g(x)) \in Y$  und  $-y = (f(x'), g(x')) \in Y$ . Nach T 1a-b und T 2a-b folgt

$$(1-\alpha)y + \alpha(-y) = (1-\alpha)f(x) + \alpha f(x') \geq f\left(\frac{x+\alpha x'}{2}\right) \geq f\left(\frac{x+x'}{2}\right) = 0, \quad \frac{x+\alpha x'}{2} \in X,$$

$$(6-9b) \quad g\left(\frac{x+x'}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(g(x) + g(x')) = 0,$$

was nach T 5 die Gleichungen

$$(6-10) \quad f\left(\frac{x+x'}{2}\right) = g\left(\frac{x+x'}{2}\right) = 0$$

und nach T 4 die Beziehung  $(x+x')/2 = 0$  impliziert. Hieraus folgt nach T 1a wegen  $X \subseteq \Gamma \subseteq E_n^+$  die Gleichung  $x = x' = 0$  und nach Annahme T 3, wie behauptet,  $y = -y = 0$ , q.e.d.

Die Voraussetzungen T 6 und T 6\* beziehen sich auf die Produktivität des Raumes  $Y_F$ . Sie besagen, daß  $Y_F$  innere Punkte von  $E_r^+$  enthält. T 6 und T 6\* fordern im wesentlichen, wie die folgenden Lemmata zeigen, die S-Regularität der die Menge  $X(f, g, z_P^0 | \Gamma)$  definierenden expliziten Restriktionen.

Lemma 6.1: Ist von allen primären Gütern ein positiver Anfangsbestand vorhanden,  $z_P^0 > 0$ , so existiert unter den Annahmen T 1a-b, T 2a-b, T 3 und T 6 ein Vektor  $x^0 \in \Gamma$  mit

$$(6-11) \quad \begin{pmatrix} f(x^0) \\ g(x^0) + z_P^0 \end{pmatrix} > 0.$$

Beweis.

Man wähle Konstanten  $\lambda_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, r$ ) mit  $\sum_i \lambda_i < 1$ . Für die nach T 6 vorhandenen Vektoren  $x^i \in \Gamma$  gilt dann nach T 1b und T 3a die Beziehung  $x^0 = \sum_i \lambda_i x^i \in \Gamma$  und nach T 1a, T 2a-b, T 3b, T 6 sowie  $z_P^0 > 0$  die Ungleichungskette

$$(6-12) \quad \begin{pmatrix} f(x^0) \\ g(x^0) + z_P^0 \end{pmatrix} \geq \sum_i \lambda_i \begin{pmatrix} f(x^i) \\ g(x^i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_P^0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \sum \lambda_i) z_P^0 \end{pmatrix}$$

q.e.d.

Lemma 6.2: Unter den Annahmen T 1a-b, T 2a-b und T 6\* existiert ein Vektor  $x^0 \in \Gamma$ , der die Ungleichung (6-11) erfüllt.

Der Beweis ergibt sich in offenkundiger Weise durch Anwendung des Lemmas 5.3 mit  $x^0 = \sum_i \lambda_i x^i + \sum_k \lambda_k x^k$ ,  $\sum \lambda_i + \sum \lambda_k = 1$ ,  $\lambda_i, \lambda_k > 0$ .

Die Annahmen T 1 bis T 6 schließen das Phänomen prozeßexterner Wirtschaftlichkeiten oder Unwirtschaftlichkeiten (economies / diseconomies to scale) nicht aus. Die Ergiebigkeit eines bestimmten Prozesses kann durchaus von den Prozeßgraden anderer Prozesse abhängen. Die Erscheinung abnehmender Ertragszuwächse kann ebenfalls als eine externe Unwirtschaftlichkeit interpretiert werden; es handelt sich hierbei um modellexterne Unwirtschaftlichkeiten, deren Quellen nicht explizite in der Formulierung des Modells erscheinen.

Man beachtet, daß produktive lineare Modelle als Spezialfälle in der gegenwärtigen Formulierung enthalten sind.

6.1.6 Häufig werden in der Produktionstheorie Situationen optimalen Faktoreinsatzes durch marginale Bedingungen beschrieben. Die Bedingungen T 1 bis T 6 in 6.1.4 erfahren dann einige Abänderungen, die nachfolgend aufgeführt sind.

T 1\*: Es gilt  $\Omega \subseteq E_n$  und  $\Gamma = E_n^+ \subseteq \Omega$ .

T 2 c\*: Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sind in  $\Omega$  differenzierbar.

T 7: Die Funktionen  $(f(x), g(x) + z_p^0)$  sind in jedem Punkt  $x$  von  $X$  K-T-regulär.

Eine Diskussion dieser Modifikationen erübrigt sich; man vergleiche die Ausführungen in Anmerkung 55 und die Bemerkung 2 von 5.3.4.

## 6.2 Effizienzkriterien und Existenzsatz

6.2.1 Zuerst wird gezeigt, daß sich jeder effiziente Punkt des Produktionsraums  $Y$  durch einen Vektor von Schattenpreisen charakterisieren läßt.

Satz 6.2 (Allgemeines Effizienzkriterium): (a) Unter den Annahmen des Lemmas 6.1 oder des Lemmas 6.2 ist es für die

Effizienz eines Punktes  $\bar{y} = (f(\bar{x}), g(\bar{x})) \in Y$  notwendig, daß ein Preisvektor  $\bar{p} = (\bar{p}_F, \bar{p}_P)$  mit

$$(6-13) \quad \bar{p}_F \geq 0, \quad \bar{p}_{P=} \geq 0, \quad \bar{p}_{P>} = 0 \quad 90/$$

derart existiert, daß

$$(6-14) \quad \bar{p}_F f(x) + \bar{p}_P g(x) \leq \bar{p}_F f(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0$$

für alle  $x \in \Gamma$  gilt.

(b) Für die Effizienz eines Vektors  $\bar{y} = (f(\bar{x}), g(\bar{x})) \in Y$  ist es hinreichend, daß die Bedingungen (6-13) und (6-14) mit einem  $\bar{p}_F > 0$  erfüllt sind.

#### Beweis.

Notwendigkeit.  $\bar{y} = (f(\bar{x}), g(\bar{x})) \in Y$  sei effizient, d.h.  $\bar{y}_F = f(\bar{x})$  sei vektormaximal auf  $Y_F$ . Unter den getroffenen Annahmen läßt sich Satz 5.2.b anwenden. Hat die Lagrange-sche Form  $\phi(x, u, w, \bar{v}) = \bar{v}f(x) + u(g(x) + z_P^0) + wf(x)$  dann etwa den Sattelwert  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v})$ , so ergibt sich aus

$$(6-15) \quad \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \leq \phi(x, u, w, \bar{v}) \text{ für alle } u \geq 0, w \geq 0$$

die Gleichung  $\bar{u}(g(\bar{x}) + z_P^0) + \bar{w}f(\bar{x}) = 0$ , d.h. wegen  $\bar{x} \in X$

$$(6-16) \quad (a) \bar{u}(g(\bar{x}) + z_P^0) = 0; \quad (b) \bar{w}f(\bar{x}) = 0.$$

Setzt man nun  $\bar{p}_P = \bar{u}$  und  $\bar{p}_F = \bar{v} + \bar{w}$ , so ergibt sich aus (6-16a) die Bedingung  $\bar{p}_{P=} \geq 0$  und  $\bar{p}_{P>} = 0$ , während  $\bar{v} \geq 0$  und  $\bar{w} \geq 0$  die Bedingung  $\bar{p}_F \geq 0$  implizieren. Damit ist (6-13) erfüllt. Die Bedingung (6-14) ergibt sich aus der für alle  $x \in \Gamma$  gültigen Ungleichung

$$(6-17) \quad \phi(x, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \leq \phi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{w}, \bar{v})$$

und der Gleichung (6-16).

Hinlänglichkeit. Der Punkt  $\bar{y} = (f(\bar{x}), g(\bar{x})) \in Y$  befriedige die Bedingungen (6-13) und (6-14). Man definiere ein  $\bar{w} \geq 0$  derart, daß  $\bar{w}f(\bar{x}) = 0$  ist, jedoch  $\bar{v} = \bar{p}_F - \bar{w} > 0$  bleibt. Aus (6-13) resultiert für  $u = \bar{p}_P$  die Gleichung  $\bar{u}(g(\bar{x}) + z_P^0) = 0$ .

Da zudem  $\bar{x} \in X$  gilt, ist die Bedingung (6-14) einer Sattelpunktbedingung für die Funktion  $\phi(x, u, w, \bar{v}) = \bar{v}f(x) + u(g(x) + z_P^0) + wf(x)$  gleichwertig. Anwendung des Satzes 5.2.a vollendet den Beweis, q.e.d.

Bemerkung 1. Daß beim allgemeinen Effizienzkriterium die notwendige und die hinreichende Bedingung bezüglich  $\bar{p}_F$  auseinanderfallen, war zu erwarten. Die Annahmen T 1a-b, T 2a-b sowie T 3 liegen auch den Effizienzsätzen 2.4 und 3.1 zugrunde. Neu ist dagegen, daß die Gültigkeit der notwendigen Bedingung von der Annahme T 6 bzw. T 6\*, die die S-Regularität der Restriktionen von X nach sich ziehen, abhängt. Diese Voraussetzungen werden bei linearen Technologien nicht benötigt, da in diesem Falle der Satz 5.2.b\* mit leerem Vektor  $g^N(x)$  und  $\Omega = E_n$  sowie  $\Gamma = E_n^+$  anwendbar ist.

Bemerkung 2. Die notwendige Bedingung des Satzes 6.2 gilt auch unter den Annahmen T 1\*, T 2a-b, c\* und T 7. Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 3 von 5.3.5. Im Falle linearer Technologien ergibt sich überdies aus der Bemerkung 1 von 5.3.5, daß  $\bar{p}_F$  strikt positiv sein muß. In diesem Falle stimmen notwendige und hinreichende Bedingung überein.

Bemerkung 3. Die Annahme T 6 in Verbindung mit  $z_1^0 > 0$  bzw. die Annahme T 6\*, deren Gültigkeit im Satz 6.2.a vorauszusetzen ist, ist insofern bedenklich, als sie die Möglichkeit ausschließt, intermediäre Güter formal unter den primären Gütern aufzuführen. Intermediäre Güter sind dadurch charakterisiert, daß von ihnen keine Anfangs- und Endbestände vorhanden sind, also  $g_k(x) = 0$  bzw.  $g_k(x) \geq 0$  und  $-g_k(x) \geq 0$  gilt. Wegen der Linearität von  $g_k(x)$  bei intermediären Gütern wird jedoch gewöhnlich eine der in Bemerkung 1 und 2 genannten Modifikationen des Satzes 6.2.a anwendbar sein, in denen auf die obigen Annahmen verzichtet werden kann.

Bemerkung 4. Gegenüber den früheren Effizienzkriterien ebenfalls neu ist der Umstand, daß nicht mehr  $\bar{p}_F f(x) + \bar{p}_P g(x) \leq 0$  für alle  $x \in \Gamma$  gelten muß. Dies wird bereits durch das trivia-

le Beispiel  $y_F = f(x) = \sqrt{x}$  und  $y_P = g(x) = -x$  mit  $\Gamma = E_1^+$  und  $z_P^0 = 1$  belegt. Effizient ist nur der Punkt  $\bar{y} = (\bar{y}_F, \bar{y}_P) = (1, -1)$ , Gäbe es Schattenpreise  $\bar{p} = (\bar{p}_F, \bar{p}_P)$  mit der Eigenschaft  $\bar{p}_F \sqrt{x} - \bar{p}_P x \leq \bar{p}_F - \bar{p}_P = 0$  für alle  $x \in X$ , so müßte für alle diese  $x$  wegen  $\bar{p}_F \geq 0$  die Ungleichung  $\sqrt{x} - x \leq 0$  richtig sein, die aber für alle  $x$  im Innern von  $X$  falsch ist. Es ist ein allgemeines Kennzeichen nichtlinearer Technologien, daß der Ausdruck  $\bar{p}_F f(x) - \bar{p}_P z_P^0$  positiv sein kann. Negativ darf er bei Gültigkeit der Annahme T 3 nicht sein. Dieser Ausdruck stellt die Differenz zwischen dem zu Schattenpreisen  $\bar{p}_F$  bewerteten Output  $f(x)$  an finalen Gütern und dem zu Schattenpreisen  $\bar{p}_P$  bewerteten Input  $g(x)$  an Produktionsfaktoren, also den Nettowert der Produktion, dar. Effiziente Produktion ist dadurch hervorgehoben, daß sich Verrechnungspreise  $\bar{p}$  finden lassen, so daß der Nettowert der Produktion im effizienten Punkt ein Maximum bezüglich des Produktionsraumes  $Y$  annimmt.

Auf Grund dieser Tatsachen lassen sich die Bedingungen (6-13) und (6-14) ökonomisch wie folgt deuten. Angenommen, es gäbe externe Märkte für finale Güter und für Produktionsfaktoren, und die betrachtete Wirtschaft (z.B. eine Unternehmung) könnte Endprodukte zu Preisen  $p_F$  und Produktionsfaktoren zu Preisen  $p_P$  am Markte in jeder gewünschten Menge kaufen oder verkaufen (Vorliegen vollständiger Konkurrenz auf den fingierten Märkten). Der Ausdruck  $\phi(x, p) = p_F f(x) + p_P (g(x) + z_P^0)$  stellt dann den gesamten Nettoerlös dar, den die Wirtschaft durch Transaktionen am Produkt- und Faktormarkt in der Periode unter der alleinigen Bedingung erzielen kann, daß die unspezifizierten Restriktionen  $x \in \Gamma$  eingehalten werden. Zu gegebenen Marktpreisen  $p_F^0 \geq 0$ ,  $p_P^0 \geq 0$  sucht die Wirtschaft unter der Zielsetzung der Erlösmaximierung einen solchen Punkt  $x^0 \in \Gamma$  zu bestimmen, daß  $\phi(x^0, p^0) \geq \phi(x, p^0)$  für alle  $x \in \Gamma$  ausfällt. Ist ein derartiges  $x^0$  ermittelt, so befindet sich die Wirtschaft zu den gegebenen Preisen im Gleichgewicht, vorausgesetzt, daß die Produktion verlustlos ist. Dies ist aber wegen Annahme T 3 und  $z_P^0 \geq 0$  stets erfüllt. Die im Satz 6.2 auftretenden Preisvektoren  $\bar{p}_F$  und  $\bar{p}_P$  zeichnen sich vor allen übrigen Preis-

vektoren  $p_F^0, p_P^0$  dadurch aus, daß die Wirtschaft zur Bestimmung effizienter Punkte des Produktionsraums  $Y$  ohne Rücksicht auf die expliziten Gütermengenrestriktionen so verfahren kann, als ob sie das Maximum der Erlösfunktion  $\phi(x, \bar{p})$  allein bezüglich der Nebenbedingung  $x \in \Gamma$  erstrebe. Zu Preisen  $\bar{p}$  erreicht die Wirtschaft das Maximum des Nettoerlöses ausschließlich durch den Absatz der von ihr erzeugten Endprodukte, ohne eine Veranlassung zu irgendwelchen Transaktionen am Faktormarkt oder zu Käufen am Produktmarkt zu haben. Diese Lenkungs-funktion besitzen die Größen  $\bar{p}$  selbst dann, wenn keine Märkte vorhanden sind; sie sind von der marktwirtschaftlichen Formulierung des Modells unabhängig.<sup>91/</sup>

Satz 6.3: Unter den Annahmen des Satzes 6.2.a ist es notwendig für die Effizienz eines Punktes  $\bar{y} = (\bar{y}_F, \bar{y}_P) \in Y$ , daß ein Vektor  $\bar{p}_F \geq 0$  derart existiert, daß die Linearform  $L(y_F) = \bar{p}_F y_F$  in  $\bar{y}_F$  das Maximum auf der Menge  $Y_F$  annimmt. Existiert umgekehrt ein Vektor  $p_F^* > 0$ , so daß  $L(y_F) = p_F^* y_F$  für  $\bar{y}_F \in Y_F$  das Maximum auf  $Y_F$  besitzt, so ist  $\bar{y}_F$  auf  $Y_F$  vektormaximal.

Der Beweis ist offenkundig.

6.2.2 Damit die bisherige Diskussion nicht inhaltsleer ist, muß nachgewiesen werden, daß überhaupt effiziente Punkte von  $Y$  existieren. Wir geben zunächst folgendes

Lemma 6.3: Die Technologie der betrachteten Wirtschaft erfülle die Annahmen T 1a, c, T 2a, c und T 6. Ist dann die Menge  $X$  beschränkt, so existiert ein nichttrivialer effizienter Punkt  $\bar{y} = (f(\bar{x}), g(\bar{x}))$  im Produktionsraum  $Y$ .

Beweis.

Aus der Abgeschlossenheit von  $\Gamma$  (nach T 1c) und der Stetigkeit der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $\Gamma$  (nach T 2c) folgt, daß  $X$  eine abgeschlossene Menge ist. Sie ist nach T 6 zudem nicht leer. Zusammen mit der Hypothese des Lemmas bedeutet dies, daß  $X$  eine nichtleere kompakte Menge bildet. Die Punktmenge  $Y_F$  ist daher ebenfalls nichtleer und nach T 2c kompakt.<sup>92/</sup>

Die Linearform  $L(y_F) = p_F^* y_F$  mit  $p_F^* > 0$  nimmt daher auf  $Y_F$  ihr Maximum an<sup>93/</sup>, etwa im Punkte  $\bar{y}_F = f(\bar{x}) \in Y_F$ . Nach dem Satz 6.3 ist  $\bar{y}_F$  in  $Y_F$  vektormaximal und  $\bar{y} = (f(\bar{x}), g(\bar{x})) \in Y$  mithin effizient bezüglich  $Y$ . Überdies gibt es nach T 6 Punkte  $y^i \in Y$  mit  $e^i y_F^i > 0$ , also  $y_F^i \geq 0$ . Der soeben konstruierte Vektor  $\bar{y}$  muß daher von 0 verschieden sein, q.e.d.

6.2.3 Im folgenden sind Bedingungen anzugeben, welche die Beschränktheit der Menge  $X = X(f, g, z_P^0 | \Gamma)$  nach sich ziehen.

Eine naheliegende Annahme, welche die Beschränktheit von  $X$  beinhaltet, ist, daß die Menge  $\Gamma$  der technologisch möglichen Prozeßgrade beschränkt ist.<sup>94/</sup> Besteht die betrachtete abstrakte Wirtschaft etwa aus einer oder mehreren Unternehmungen, so besagt diese Annahme, daß aus unternehmungsinternen Gründen kein Produzent in der Lage ist, die ihm zur Verfügung stehenden Basisprozesse auf beliebig hohem Prozeßniveau zu betreiben. Solche internen Gründe können in unternehmungsspezifischen Kapazitätsbeschränkungen, in der Beschränktheit der verfügbaren Menge der nicht vollständig substitutionalen unternehmungsspezifischen Produktionsfaktoren oder in anderweitigen modellexternen Restriktionen liegen. Diese Annahme könnte umso plausibler erscheinen, als das Gesetz vom nichtzunehmenden Ertragszuwachs, wie es sich in den Annahmen T 2b und T 3 ausdrückt, im allgemeinen mit dem Vorhandensein unvermehrbarer spezifischer Produktionsfaktoren (z.B. des Faktors "Unternehmerleistung") erklärt wird.<sup>95/</sup> Die explizite Einbeziehung derartiger unternehmungsspezifischer oder anderweitig externer Restriktionen in das Produktionsmodell kann unerwünscht sein, wenn man etwa - wie im Modell des Kapitels 7 - ausschließlich die Tausch- und Marktbeziehungen zwischen den einzelnen Produktionseinheiten studieren will; hier würde das Auftreten von Preisen (Lagrangeschen Multiplikatoren) für explizite formulierte unternehmungsspezifische Faktoren störend wirken.

Dennoch ist die Annahme einer beschränkten Menge  $\Gamma$  unbefriedigend. Sie simplifiziert das Problem der Existenz effi-

zienter Punkte in häufig unzulässiger Weise. Die für lineare Technologien grundlegende Reproduzierbarkeit der Produktionsprozesse darf im allgemeinen Produktionsmodell, das den linearen Fall einschließen soll, nicht ignoriert werden. Es ist nicht einzusehen, weshalb das System bei über alle Grenzen wachsendem Angebot  $z_p^0$  an primären Gütern, von der Produktionsstruktur her gesehen, nicht in der Lage sein soll, beliebig hohe Prozeßgrade zu realisieren (womit über die Höhe der Nettoausbringung des Systems noch nichts ausgesagt ist). Die Verwirklichung sehr hoher Aktivitätsgrade scheitert weniger an modellexternen Restriktionen seitens der technologischen Struktur der Produktion als vielmehr an der Begrenztheit des Anfangsbestandes  $z_p^0$  der einsatzfähigen Faktormengen. Im letzten Fall wird der Nachweis der Beschränktheit der Menge  $X$  dadurch erschwert, daß einige oder sämtliche primären Güter in der laufenden Produktion vermehrbar sein können; die Funktion  $g(x)$  kann sehr wohl positive Komponenten für zulässige Prozeßgrade enthalten.

Es ist bemerkenswert, daß sich trotzdem unter Annahmen über die Technologie, die denen des linearen Falles genau entsprechen (vgl. S. 14), folgendes Theorem beweisen läßt.

Satz 6.4: Bei Gültigkeit der Annahmen T 1 bis T 5 ist die Menge  $X = X(f, g, z_p^0 | \Gamma)$  der zulässigen Prozeßgrade beschränkt.

Beweis. 96/

Angenommen, es gäbe in  $X$  eine Punktfolge  $\{x^\gamma\}$  mit  $\lim_\gamma ex^\gamma = +\infty$ . Man normiere  $x^\gamma$  durch die Definition von  $\delta_\gamma$  mit  $x^\gamma = \delta_\gamma \hat{x}^\gamma$  und  $e \hat{x}^\gamma = 1$ . Dann gilt  $\delta_\gamma \geq 0$  und für hinreichend großes  $\gamma$  auch  $\delta_\gamma \geq 1$ , da  $\lim_\gamma \delta_\gamma = +\infty$ . Wie in Bemerkung 2 von 6.1.4 gezeigt, ist  $X$  eine konvexe, den Nullpunkt von  $E_n$  enthaltende Menge. Für hinreichend großes  $\gamma$  impliziert  $x^\gamma \in X$  daher die Beziehung  $\hat{x}^\gamma \in X$  und ferner nach T 2b und T 3b die Ungleichungen

$$(6-18) \quad \delta_\gamma f(\hat{x}^\gamma) \geq 0, \quad \delta_\gamma g(\hat{x}^\gamma) + z_p^0 \geq 0.$$

Aus der Folge  $\{\hat{x}^Y\}$  läßt sich eine konvergente Teilfolge  $\{\hat{x}^{Y_k}\}$  auswählen; es sei etwa  $\lim_{Y_k} \hat{x}^{Y_k} = \hat{x}$ . <sup>27/</sup> Da  $X$ , wie beim Beweise von Lemma 6.3 bemerkt, abgeschlossen ist, gilt  $\hat{x} \in X$  und also nach Annahme T 2c

$$(6-19) \quad f(\hat{x}) = \lim_{Y_k} f(\hat{x}^{Y_k}); \quad g(\hat{x}) = \lim_{Y_k} g(\hat{x}^{Y_k}).$$

Wegen  $\delta_Y \rightarrow +\infty$  resultiert aus (6-18) sowohl  $f(\hat{x}) \geq 0$  als auch  $g(\hat{x}) \geq 0$ . Dies impliziert nach T 5 die Gleichungen  $f(\hat{x}) = g(\hat{x}) = 0$ , woraus nach T 4 die Gleichung  $\hat{x} = 0$  im Widerspruch zur Konstruktion von  $\hat{x}$  folgt, da  $e\hat{x} = 1$  sein muß. Die Menge  $X$  ist daher beschränkt, q.e.d.

Damit ist unter den Annahmen T 1 bis T 6 die Existenz mindestens eines nichttrivialen effizienten Punktes  $\bar{y}$  im Produktionsraum  $Y$  gesichert.

### 6.3 Monopolistische und technologische "Ausbeutung" der

#### Produktionsfaktoren unter dem Prinzip der Grenzproduktivität

6.3.1 In der untersuchten abstrakten Wirtschaft sei nur ein finales Gut vorhanden;  $y_F = \varphi(x)$  bezeichne eine skalare Funktion des Prozeßgradvektors  $x$ . (Um anzudeuten, daß die Dimension von  $f(x)$  gleich 1 ist, wird das Symbol  $f$  durch  $\varphi$  ersetzt.) Bei der Zielfunktion  $\varphi$  kann es sich um eine Umsatzfunktion handeln, falls der Wirtschaftsplan einer Unternehmung betrachtet wird, oder etwa um eine individuelle bzw. kollektive Nutzenfunktion eines privaten Haushalts bzw. einer Planbehörde. Das in Abschnitt 6.1 eingeführte Modell gestattet zwanglos alle diese Deutungen.

Der Einfachheit halber beziehen wir uns im Abschnitt 6.3 auf das Beispiel einer Unternehmung, die das Ziel der Umsatzmaximierung bezüglich der ihr auferlegten Produktionsbeschränkungen verfolgt. Wir studieren das Problem der Verteilung des

am Absatzmarkt erzielten monetären Erlöses  $\varphi(x)$  auf die an der Produktion mitwirkenden Produktionsfaktoren (Zurechnungs- oder Imputationsproblem). Das Zurechnungsproblem stellt sich der Unternehmung, da die Einkommen der in aktivitätsanalytischen Modellen auftretenden nichttransferablen Faktoren Quasirenten im Marshallischen Sinne darstellen, deren Höhe nicht am Faktormarkt sondern durch interne Verrechnung bestimmt wird. Aufgabe dieses Abschnitts ist es zu zeigen, daß die Bildung der internen Verrechnungspreise  $\bar{p}_P$  (vgl. Abschnitt 6.2) nach dem Grenzproduktivitätsprinzip der neoklassischen Produktionstheorie erfolgt und daß bei Entlohnung der Faktoren nach diesem Prinzip in nichtlinearen aktivitätsanalytischen Modellen das Phänomen der "Faktorausbeutung" auftreten kann, das sich darin zeigt, daß dann der Nettoerlös der Unternehmung,  $\varphi(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0$  (vgl. (6-14)), positiv ist.

6.3.2 Den weiteren Erörterungen dieses Abschnitts werden die Annahmen T 1\*, T 2a, b, c\*, T 3 bis T 5 und T 7 zugrundegelegt.  $\Omega$  sei eine offene Punktmenge, die die Menge  $\Gamma = E_n^+$  enthalte. Die Aufnahme der Restriktion  $\varphi(x) \geq 0$  in die Definition der Menge  $X$  (vgl. (6-3)) erübrigt sich, weil im Optimum wegen T 3 ohnehin  $\varphi(\bar{x}) \geq 0$  gelten muß. Die Annahme der S- bzw. K-T-Regularität entfällt für  $\varphi(x)$ . Durchaus problematisch, aber gegenwärtig schwer vermeidbar ist die Annahme der Konkavität der Umsatzfunktion  $\varphi(x)$  (vgl. Annahme T 2b). Ferner wird unterstellt, daß Nichtlinearitäten der Zielfunktion  $\varphi(x)$  ausschließlich auf Preiseinflüsse am Absatzmarkt, also auf die Wirkung konjekturaler Preis-Absatzfunktionen  $p_F = p_F(x)$  zurückzuführen sind, nicht aber auf Nichtlinearitäten beim Output der Endprodukte in den Basisprozessen.

### 6.3.3 Primales Problem der Umsatzmaximierung

$$(6-20) \quad \varphi(x) = \max_{x \in X} \{ \varphi(x) \mid g(x) + z_P^0 \geq 0, x \in E_n^+ \},$$

und Imputationsproblem sind mittels der in den Abschnitten 5.2 und 5.3 dargestellten Theorie simultan lösbar. Das Sattelwert-

problem und das duale Problem nehmen dabei eine besonders einfache Form an, weil der Schattenpreis  $\bar{p}_F$  bloß als skalarer Proportionalitätsfaktor auftritt, der durch geeignete Normierung der Faktorpreise  $\bar{p}_P$  eliminiert werden kann: der Preis der Geldeinheit, in welcher das finale Gut "Umsatz" gemessen wird, ist gleich 1,  $\bar{p}_F \equiv 1$ . Grundlegend für die Bewertung der Produktionsfaktoren ist der

Satz 6.5: Damit ein Prozeßgradvektor  $\bar{x} \in X$  eine Lösung des Problems der Umsatzmaximierung (6-20) darstellt, ist es unter den Annahmen T 1\*, T 2a, b, c\* und T 7 notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen

$$(6-21) \quad (a) \quad \bar{\Phi}(\bar{x}) + \bar{p}_P G(\bar{x}) \leq 0, \quad (b) \quad (\bar{\Phi}(\bar{x}) + \bar{p}_P G(\bar{x}))\bar{x} = 0$$

und

$$(6-22) \quad \bar{p}_P(g(\bar{x}) + z_P^0) = 0$$

für einen Schattenpreisvektor  $\bar{p}_P \geq 0$  erfüllt sind. 98/

Der Beweis folgt aus Lemma 5.9 und Bemerkung 3 von 5.3.5 sowie aus Satz 5.4.a.

Die Bedingungen (6-21) und (6-22) zeigen, daß die Schattenpreise  $\bar{p}_P$  als Ersatz für Preise am Faktormarkt, die durch den Wettbewerbsprozeß nach dem Grenzproduktivitätsprinzip zustande kommen, zu betrachten sind. Obgleich für die spezifischen Produktionsfaktoren der Unternehmung in der Regel kein Faktormarkt existiert, besitzen die Multiplikatoren formal die Eigenschaften von Wettbewerbspreisen und dienen daher wie diese der Lenkung der Produktion im Sinne optimaler Faktorallokation.

Die Bedingung (6-22) beinhaltet, daß bei Gültigkeit der strengen Ungleichung  $e^k(g(\bar{x}) + z_P^0) > 0$  für den k-ten Faktor der Verrechnungspreis  $(\bar{p}_P)_k$  gleich Null sein muß. Der k-te Faktor ist dann, da im Überschuß vorhanden, wegen seiner Spezifität ein freies Gut für die Unternehmung. Die Bedingungen (6-21) sind Ausdruck des Grenzproduktivitätsprinzips in prozeßanalytischer Fassung. Die j-te Ungleichung (6-21a), also

$$(6-23) \quad e^j(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \bar{p}_p G(\bar{x})) \leq 0$$

besagt, daß die Differenz zwischen dem Grenzerlös in bezug auf den j-ten Prozeßgrad,  $e^j \bar{\Phi}(\bar{x}) = \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x_j}$ , und den im-

putierten Grenzkosten der j-ten Aktivität,  $-\bar{p}_p G(x)e^j$ , im Gleichgewichtspunkt  $\bar{x}$  nichtpositiv sein muß. Der partielle Grenzerlös kann aber nur dann niedriger als die partiellen imputierten Grenzkosten sein, wenn die damit unwirtschaftliche Aktivität Nr. j nicht betrieben wird, also  $\bar{x}_j = 0$  ist. Die Gleichung (6-21b) bedeutet also, daß für jede Aktivität der totale Grenzerlös  $e^j \bar{\Phi}(\bar{x}) \bar{x}_j$  den totalen imputierten Grenzkosten  $(-\bar{p}_p G(\bar{x}) e^j) \bar{x}_j$  derselben Aktivität gleich ist, d.h.

$$(6-24) \quad e^j(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \bar{p}_p G(\bar{x})) \bar{x}_j = 0.$$

6.3.4 Zusätzliche Einsicht in die Struktur des Zurechnungsproblems vermittelt die Formulierung des zu (6-20) dualen Problems. Dieses Problem besteht hier in der Bestimmung der Lösungen von

$$(6-25) \quad h(x, p_p) = \min!_R$$

worin

$$(6-26) \quad h(x, p_p) = \varphi(x) - \bar{\Phi}(x)x + p_p(g(x) - G(x)x) + p_p z_p^0$$

und

$$(6-27) \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ p_p \end{pmatrix} \mid \bar{\Phi}(x) + p_p G(x) \leq 0, p_p \geq 0, x \geq 0 \right\}.$$

Satz 6.6: Unter den Bedingungen T 1\*, T 2a, b, c\* und T 7 existiert zu jeder Lösung  $\bar{x}$  des Problems (6-20) ein Preissystem  $\bar{p}_p \geq 0$ , so daß  $(\bar{x}, \bar{p}_p)$  eine Lösung des Problems (6-25) darstellt. Umgekehrt ist unter der zusätzlichen Annahme, daß  $\bar{\Phi}(x) + p_p G(x)$  in  $E_n^+$  bezüglich x differenzierbar ist, der x-Teil jeder nach 5.3.8 regulären Lösung  $(\bar{x}, \bar{p}_p)$  des Problems (6-25) zugleich eine Lösung des Problems (6-20)

Der Beweis ergibt sich aus den Theoremen 5.5 und 5.6. Man beachte auch die Bemerkung 3 in 5.3.9.

Es ist wirtschaftlich einleuchtend, daß man das im Satz 6.5 auftretende Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{p}_P)$  auch gewinnen kann, indem man die in (6-27) beschriebene Menge R der dual zulässigen Vektorpaare durchmustert. Daß man sich dabei der Minimierung der Zielfunktion  $h(x, p_P)$  zu bedienen hat, ist weniger plausibel. Die Funktion  $h(x, p_P)$  läßt sich als fiktives Verrechnungseinkommen der Unternehmung und der Produktionsfaktoren auffassen, welches dem dual zulässigen Vektorpaar  $(x, p_P)$  nach dem Marginalprinzip zugeordnet ist. Der Summand  $p_P z_P^0$  ist das Faktoreinkommen, der Summand  $\varphi(x) - \bar{\Phi}(x)x$  das Residualeinkommen der Unternehmung aus monopolistischem Absatz und der Summand  $p_P(g(x) - G(x)x)$  das Residualeinkommen der Unternehmung aus der Durchführung der Produktion. Die Residualeinkommen sind bei den prozeßanalytischen Modellen der Kapitel 1 bis 3 gleich Null.

Aus der im Gleichgewicht gültigen Beziehung  $h(\bar{x}, \bar{p}_P) = \varphi(\bar{x})$  ergibt sich zusammen mit der Bemerkung 3 in 5.3.9 die Darstellung des in (6-14) auftretenden Nettoerlöses der Unternehmung als Summe der Residualeinkommen

$$(6-28) \quad \varphi(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0 = (\varphi(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x})\bar{x}) + \bar{p}_P(g(\bar{x}) - G(\bar{x})\bar{x}).$$

Die Entstehung der Residualgrößen ist im folgenden zu erklären.

6.3.5 Zur ökonomischen Deutung der Residualgröße  $\varphi(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x})\bar{x}$  unterstellen wir vorerst eine in den primären Gütern lineare Technologie  $g(x) = A_P x$ . Aus (6-28) wird dann

$$(6-29) \quad \varphi(\bar{x}) - \bar{p}_P z_P^0 = \varphi(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x})\bar{x}.$$

Das zugerechnete Gesamteinkommen der Produktionsfaktoren ist in diesem Fall gleich dem totalen Grenzumsatz  $\bar{\Phi}(\bar{x})\bar{x}$  an der realisierten Grenze der Produktion. Dagegen erzielen diejenigen Einheiten von Faktormengenkombinationen, die bereits vor dem Erreichen der realisierten Grenze an der Produktion mitwirken, bei Vorliegen einer streng konkaven Umsatzfunktion höhere partielle Grenzumsätze als in der realisierten Grenze

selbst. Der monetäre Gesamterlös  $\varphi(\bar{x})$  wird unter diesen Umständen nicht in voller Höhe von der Summe  $\bar{p}_P z_P^0$  der Faktoreinkommen ausgeschöpft, d.h., es ist  $\varphi(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x})\bar{x} > 0$  für  $\bar{x} \geq 0$ .

Die Grundlage des soeben durchgeführten Schlusses bildet das

Lemma 6.4:  $h(x)$  sei in einer Menge  $\Lambda$  definiert und differenzierbar. Für  $\bar{x} \neq 0$  sei das Segment  $S = \{x \mid x = \lambda \bar{x}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$  in  $\Lambda$  enthalten. Ferner sei  $h(0) = 0$ . Ist dann  $h(x)$  auf  $S$  konkav bzw. streng konkav, so gilt  $h(\bar{x}) - H(\bar{x})\bar{x} \geq 0$  bzw.  $h(\bar{x}) - H(\bar{x})\bar{x} > 0$ .

Beweis.

Anwendung des Lemmas 5.1 ergibt bei konkavem  $h(x)$  unmittelbar die Ungleichung  $h(\bar{x}) - H(\bar{x})\bar{x} \geq 0$ . Wäre nun  $e^k(h(\bar{x}) - H(\bar{x})\bar{x}) = 0$ , so wäre für  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < 1$  nach Lemma 5.1

$$(6-30) \quad e^k h(\lambda \bar{x}) \leq e^k (h(\bar{x}) + (\lambda-1)H(\bar{x})\bar{x}) = e^k \lambda h(\bar{x})$$

im Widerspruch zur strengen Konkavität der  $k$ -ten Komponente von  $h(x)$ , q.e.d.

Die obige generelle Formulierung wird am Beispiel der Aufteilung des monetären Erlöses auf die an einer bestimmten  $j$ -ten Aktivität mitwirkenden Faktoren im Falle einer additiven Umsatzfunktion  $\varphi(x) = \sum_j \varphi_j(x_j)$  mit streng konkaven  $\varphi_j(x_j) \geq 0$ ,  $j=1,2,\dots,n$ , illustriert.

Das Faktoreinkommen der  $j$ -ten Aktivität bestimmt sich zu

$$(6-31) \quad \varphi'_j(\bar{x}_j)\bar{x}_j = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{x_j = \bar{x}_j} \cdot \bar{x}_j = -\bar{p}_P a_P^j \bar{x}_j.$$

Es sei  $\bar{x}_j > 0$ . In der Abb. 3 (S. 145) ist die Aufteilung des ceteris paribus aus der  $j$ -ten Aktivität resultierenden Umsatzes  $\varphi_j(\bar{x}_j)$  auf die an diesem Prozeß mitwirkenden Faktoren (Strecke AB) und auf den Unternehmer (Strecke BC) graphisch dargestellt. Die Darstellung lehrt, daß sich für sämtliche Faktorkombinationen  $a_P^j x_j$  mit kleinerem Prozeßgrad  $x_j$  als  $\bar{x}_j$

ein höheres  $\frac{d\varphi_j}{dx_j} = \varphi'_j(x_j)$  ergibt als der Grenzsatz  $\varphi'_j(\bar{x}_j)$  in der Grenze der Produktion. Da die Produktionsfaktoren in sich homogen sind, können bei vollständigem Wettbewerb auch intramarginale Einheiten von Faktorkombinationen keinen höhe-

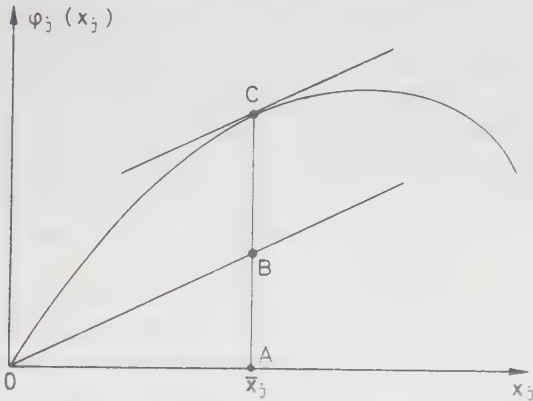


Abb. 3: "Monopolistische Ausbeutung"

ren Entgelt als den Betrag  $\varphi'_j(\bar{x}_j)$  erzielen. Die aufaddierten Differenzen zwischen den intramarginalen partiellen Grenzumsätzen und dem partiellen Grenzsatz in der Grenze der Produktion,

$$(6-32) \quad \int_0^{\bar{x}_j} (\varphi'_j(x_j) - \varphi'_j(\bar{x}_j)) dx_j = \varphi_j(\bar{x}_j) - \varphi'_j(\bar{x}_j) \bar{x}_j,$$

bilden als Residualgröße das Unternehmereinkommen aus der j-ten Aktivität. Summiert man über alle Aktivitäten, so gewinnt man als imputiertes Gesamteinkommen der Produktionsfaktoren den Ausdruck  $\Phi(\bar{x})\bar{x} = -\bar{p}_P A_P \bar{x}$  und als gesamtes Residualeinkommen  $\varphi(\bar{x}) - \Phi(\bar{x})\bar{x}$ .

Verhält sich die Unternehmung im Wettbewerb mit vollkommenen Preisanpasser, betrachtet sie also die externen Preise  $p_F^0$  der Endprodukte als gegebene Größen, so ist die Umsatzfunktion gemäß den Annahmen von 6.3.2 linear, also  $\varphi(x) = \check{p}_F A_P x$ , und das Residualeinkommen verschwindet, d.h., es gilt  $\varphi(\bar{x}) = \Phi(\bar{x})\bar{x}$ .

Bei vollständigem Wettbewerb auf der Absatzseite und linearer Technologie wird der gesamte Erlös auf die Produktionsfaktoren verteilt, d.h., es ist  $\varphi(\bar{x}) = \bar{p}_P z_P^0$ . Verbleibt der Unternehmung dagegen bei einer streng konkaven Umsatzfunktion, also bei Vorliegen konjekturaler Preis-Absatzfunktionen, ein positives Residuum, so läßt sich vermuten, daß hier das Ergebnis "monopolistischer Ausbeutung" der Produktionsfaktoren vorliegen könnte, wie es auch in der neoklassischen Preistheorie bei variablen Produktionsfaktoren auftritt. Maximale "Ausbeutung" läge in unserem Modell vor, wenn im Punkte  $\bar{x}$  keine der die Menge  $X$  definierenden Restriktionen bindend ist, die Funktion  $\varphi(x)$  in diesem Punkte also ein freies Maximum in  $E_n$  annimmt und folglich  $\bar{\Phi}(x) = 0$  und  $\bar{p}_P z_P^0 = 0$  gilt.

Die Anwendung des Begriffes der "monopolistischen Ausbeutung" auf die vorliegende Erscheinung ist gleichwohl problematisch. Bei den Größen  $\bar{p}_P$  handelt es sich um interne Verrechnungspreise, die der Charakterisierung des Maximums der Zielfunktion und der pretialen Lenkung mit dem Ziele optimalen Faktoreinsatzes dienen. Zwischen ihnen und dem tatsächlich gezahlten Entgelt je Faktoreinheit besteht kein allgemeiner zwingender Zusammenhang. Entscheidend für die Beurteilung des beobachteten Phänomens ist die jeweilige institutionale Interpretation des Produktionsmodells. Bei der gegenwärtigen Deutung des Modells kann den Einheiten der Produktionsfaktoren ein von den Verrechnungspreisen abweichendes Entgelt gezahlt werden, weil das Einkommen dieser Faktoren Rentencharakter trägt und damit beliebig manipulierbar ist.

6.3.6 Jetzt sei eine lineare Umsatzfunktion  $\varphi(x) = p_F^0 A_F x$ , jedoch eine nichtlineare Technologie  $g(x)$  angenommen. Der erste Summand der rechten Seite von (6-28) ist dann gleich Null. Da der Ausdruck  $\bar{p}_P(g(\bar{x}) - G(\bar{x})\bar{x})$  gewöhnlich positiv ist, liegt der imputierte Wert  $\bar{p}_P z_P^0$  im allgemeinen auch hier unter dem monetären Erlös  $\varphi(\bar{x})$ . Eine hinreichende Bedingung dafür, daß  $\bar{p}_P(g(\bar{x}) - G(\bar{x})\bar{x}) > 0$  gilt, besteht unter den Annahmen T 2\*, und T 3 darin, daß für ein  $k=1,2,\dots,s$  mit  $e^k \bar{p}_P > 0$  die

Funktion  $e^k g(x)$  auf dem Segment  $S = \{x \mid x = \lambda \bar{x}, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq E_n^+$  streng konkav sei (vgl. Lemma 6.4).

Die Erklärung für die Erscheinung, die auch bei nichtlinearer Technologie, die dem Zustand vollständiger Konkurrenz auf der Absatz- und Faktorseite entsprechen, bei nichtlinearer Technologie  $g(x)$  den primären Gütern ein geringerer Wert als der monetäre Gesamterlös zugerechnet wird, liegt wiederum darin, daß die Unternehmung, erstrebt sie mit gegebenen Faktoren ein Umsatzmaximum, Prozeßgrade und Schattenpreise hat, daß im besonderen die marginalen Bedingungen

$$(6-33) \quad p_F^0 A_F \leq -\bar{p}_P G(\bar{x}) \quad \text{und} \quad p_F^0 A_F \bar{x} = -\bar{p}_P G(\bar{x})\bar{x}$$

erfüllt sind und damit im Gleichgewicht der imputierte Wert der totalen marginalen Effekte der Aktivitäten auf die Restriktionen,  $-\bar{p}_P G(\bar{x})\bar{x}$ , dem Gesamterlös  $p_F^0 A_F \bar{x}$  entspricht. Diese Ausrichtung an Grenzgrößen in der Grenze der Produktion bewirkt, daß bei nichtlinearen Prozessen intramarginale Ersparnisse, die sich aus abnehmenden Ertragszuwächsen erklären, nicht auf die fixen Faktoren verrechnet werden. Der Schattenwert dieser Ersparnisse ist genau  $\bar{p}_P (g(\bar{x}) - G(\bar{x})/\bar{x})$ .

Unter den gleichen Vorbehalten wie in 6.3.5 könnte man das soeben beobachtete Phänomen als "technologische Ausbeutung" bezeichnen. Gewöhnlich treten "monopolistische" und "technologische" Ausbeutung nebeneinander auf (vgl. (6-2)).

#### 6.4 Dezentralisation der Entscheidungen bei optimalem Faktoreinsatz

6.4.1 Als institutionaler Aspekt des Problems der effizienten Produktion ergibt sich aus dem zugeordneten Sattelwertproblem, daß die zur Wahl einer optimalen Strategie führende Entscheidung häufig in eine Reihe von Einzelentscheidungen zerlegt werden kann, deren jede bereits an Hand eines Teiles

derjenigen Information getroffen werden kann, die zur Lösung des Gesamtproblems erforderlich ist. Diese Dezentralisation der Entscheidungen beim Problem der effizienten Produktion haben - im Anschluß an die Studie von Koopmans<sup>99/</sup> - namentlich Arrow / Hurwicz <sup>100/</sup> eingehend untersucht. Diese wichtige Anwendung des Dualitätsprinzips der Aktivitätsanalyse wird im folgenden dargestellt.

6.4.2 Zugrundegelegt wird das Produktionsmodell des Abschnitts 6.1 mit der Änderung, daß nicht der Vektor  $y_F$  sondern eine konkave Funktion  $\varphi(y_F)$  dieses Vektors bezüglich des Raumes  $Y_F^*$  maximiert werden soll, also

$$(6-34) \quad \varphi(y_F) = \max_{Y_F^*} ! ,$$

wobei

$$(6-35) \quad Y_F^* = \left\{ y_F \mid f(x) - y_F \geq 0, \quad y_F \geq 0, \quad x \in X \right\} \quad \text{101/}$$

gesetzt ist. Die Technologie  $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$  soll die Annahmen T 1\*, T 2a, b, c\* und T 3 bis T 6 erfüllen.  $\varphi(y_F)$  sei eine in  $E_r^+$  definierte, differenzierbare und konkave reelle Funktion mit  $\varphi(0) = 0$ . Aus Gründen besserer sachlicher Verständlichkeit wird die in Abschnitt 6.3 verwendete Deutung der abstrakten Wirtschaft als einer Produktionsunternehmung beibehalten;  $\varphi(y_F)$  wird als Umsatzfunktion aufgefaßt. Andere sachliche Interpretationen sind jedoch denkbar und zulässig (vgl. 6.3.1).

Aus den Annahmen über die Technologie und die Zielfunktion folgt die Existenz mindestens einer Lösung des Problems der effizienten Produktion. Dafür, daß  $(\bar{x}, \bar{y}_F) \geq 0$  eine Lösung dieses Problems sei, ist es bei positivem Faktorangebot  $z_P^0 > 0$  unter den gegenwärtigen Annahmen notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen

$$(6-36) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \bar{p}_F^F(\bar{x}) + \bar{p}_P^G(\bar{x}) \leq 0; & (\bar{p}_F^F(\bar{x}) + \bar{p}_P^G(\bar{x})\bar{x}) &= 0 \\ (b) \quad & \bar{\Phi}(\bar{y}_F) - \bar{p}_F \leq 0; & (\bar{\Phi}(\bar{y}_F) - \bar{p}_F)\bar{y}_F &= 0 \end{aligned}$$

und

$$(6-37) \quad (a) \quad g(\bar{x}) + z_P^0 \geq 0; \quad \bar{p}_P(g(\bar{x}) + z_P^0) = 0$$

$$(b) \quad f(\bar{x}) - \bar{y}_F \geq 0; \quad \bar{p}_F(f(\bar{x}) - \bar{y}_F) = 0$$

mit einem Preisvektor  $\bar{p} = (\bar{p}_F, \bar{p}_P) \geq 0$  erfüllt sind.

Der Beweis ist offenkundig.

6.4.3 Die Struktur der Bedingungen (6-36) und (6-37) legt es nahe, die Bestimmung der optimalen Strategie  $(\bar{x}, \bar{y}_F, \bar{p}_F, \bar{p}_P)$  auf vorerst drei unabhängig voneinander entscheidende Teilinstanzen zu delegieren, einen "Absatzmanager" ("helmsman"), einen "Produktionsmanager" ("manager") und einen "Makler" ("custodian")<sup>102/</sup>.

Der Absatzmanager hat die Aufgabe, die Funktion  $\varphi(y_F) - \bar{p}_F y_F$  bei gegebenen Preisen  $\bar{p}_F$  zu maximieren. Er erwirbt zu Preisen  $\bar{p}_F$  vom Makler Mengenkombinationen  $y_F$  der Endprodukte, verkauft sie auf den Absatzmärkten und wählt den Vektor  $\bar{y}_F$  so, daß sein Nettoerlös  $\varphi(y_F) - \bar{p}_F y_F$  für  $\bar{y}_F$  zu einem Maximum wird. Dabei wendet die Regeln (6-36b) an, für Endprodukte mit positivem partiellem Nettogrenzerlös  $e^i(\varphi(y_F) - \bar{p}_F) > 0$  die Nachfrage beim Makler und den Absatz am Markte auszudehnen, für Endprodukte mit verschwindendem partiellem Nettogrenzerlös  $e^i(\varphi(y_F) - \bar{p}_F) = 0$  Nachfrage und Absatz unverändert zu lassen und für Endprodukte mit negativem partiellem Nettogrenzerlös  $e^i(\varphi(y_F) - \bar{p}_F) < 0$  Nachfrage und Absatz einzuschränken, und zwar nötigenfalls bis zur Grenze  $e^i y_F = 0$ . Für diese Entscheidungen braucht der Absatzmanager lediglich die Erlösfunktion  $\varphi(y_F)$  und die Schattenpreise  $\bar{p}_F$  zu kennen.

Der Produktionsmanager kauft zu Preisen  $\bar{p} = (\bar{p}_F, \bar{p}_P)$  vom Makler Gütermengenkombinationen, transformiert diese gemäß der Technologie  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$  und verkauft die Erzeugnisse zu Preisen  $\bar{p}$  an den Makler. Befolgt der Produktionsmanager bei der Wahl des Prozeßgradvektors  $x$  die Vorschrift (6-36a), so ist gewährleistet, daß dabei der imputierte Nettowert der Produktion,  $\bar{p}_F f(x) + \bar{p}_P g(x)$ , maximiert wird. Solange der zugerechnete Wert des Nettogrenzprodukts der j-ten Aktivität positiv

ist,  $e^j(\bar{p}_F F(x) + \bar{p}_P G(x)) > 0$ , hat er die Produktion dieses Prozesses auszudehnen, ist der Wert des Nettogrenzprodukts gleich Null, so hat er die Produktion in diesem Prozeß unverändert zu lassen, ist der Wert des Nettogrenzprodukts schließlich negativ, so ist die Produktion in dieser Aktivität einzuschränken, nötigenfalls bis zum Prozeßgrad  $x_j = 0$ .

Die beschriebene Dezentralisation der Produktions- und Absatzentscheidungen setzt voraus, daß ein das Sattelpunktproblem lösender Preisvektor  $\bar{p}$  bekannt ist. Die Bestimmung dieses Vektors obliegt dem Makler oder den Maklern, falls für bestimmte Güter(gruppen) besondere Makler zuständig sind. Der Makler verwaltet die vorhandenen Güterbestände und setzt für jedes Gut einen einheitlichen An- und Verkaufspreis  $(p_F)_i$  bzw.  $(p_P)_k$  fest. Zu dem von ihm gesetzten Preis kauft der Makler jede von den Managern angebotene Gütermenge und verkauft an sie jede nachgefragte Menge, soweit sie verfügbar ist. Der Makler erzwingt keinen Ausgleich von mengenmäßigem Angebot und mengenmäßiger Nachfrage zu dem gesetzten Preis. Jedoch wird der Preis eines Gutes solange erhöht, wie die mengenmäßige Nachfrage das Angebot übersteigt, und solange gesenkt, und zwar gegebenenfalls bis auf Null, wie das mengenmäßige Angebot die Nachfrage übertrifft. Dabei wird der Anfangsbestand  $(z_P^0)_k$  eines primären Gutes als Teil des Angebots betrachtet. Gleichen sich mengenmäßige Nachfrage und mengenmäßiges Angebot eines Gutes aus, so wird der betreffende Preis nicht verändert.

Die hier für Manager und Makler aufgestellten Verhaltensregeln stellen sicher, daß ein einmal erreichter optimaler Vektor  $(\bar{x}, \bar{y}_F, \bar{p}_F, \bar{p}_P)$  unverändert im Sinne eines stationären Gleichgewichtswertes beibehalten wird. Ob diese Regeln, die erkennbar dem maximierenden Verhalten der Wirtschaftssubjekte in der neoklassischen Produktionstheorie und der Funktionsweise von Wettbewerbsmärkten nachgebildet sind, indes genügen, damit ein stationäres Gleichgewicht in einem dynamischen Anpassungsprozeß von einer nichtoptimalen Anfangssituation aus

erreicht wird, muß in dieser Arbeit dahingestellt bleiben.<sup>103/</sup>

6.4.4 Es ist instruktiv, die Verteilung des monetären Gesamterlöses  $\varphi(\bar{y}_F)$  auf die am Wirtschaftsprozeß mitwirkenden Manager, Makler und Produktionsfaktoren zu untersuchen. Aus Satz 5.5 und Bemerkung 3 von 5.3.9 erhält man die Identität

$$(6-38) \quad \varphi(\bar{y}_F) = [\varphi(\bar{y}_F) - \bar{\Phi}(\bar{y}_F)\bar{y}_F] + [\bar{p}_P z_P^0] + \\ [\bar{p}_F(f(\bar{x}) - F(\bar{x})\bar{x})] + [\bar{p}_P(g(\bar{x}) - G(\bar{x})\bar{x})].$$

In dieser Zerlegung sind, wie sich aus den Annahmen über  $\varphi$ ,  $f$  und  $g$  nach Lemma 6.4 ergibt, sämtliche Summanden [...] der rechten Seite nichtnegativ. Der erste Summand ist Ausdruck des Grades an "monopolistischer Ausbeutung" der Faktoren durch den Absatzmanager und die letzten beiden Summanden ergeben den Gesamtausdruck für den Grad an "technologischer Ausbeutung" durch den Produktionsmanager. Der Grad der "Ausbeutung" wird an dem Schattengewinn gemessen, den die Manager erzielen, denn es gilt

$$(6-39) \quad \bar{p}_F(f(\bar{x}) - F(\bar{x})\bar{x}) + \bar{p}_P(g(\bar{x}) - G(\bar{x})\bar{x}) = \bar{p}_F f(\bar{x}) + \bar{p}_P g(\bar{x})$$

und

$$(6-40) \quad \varphi(\bar{y}_F) - \bar{\Phi}(\bar{y}_F)\bar{y}_F = \varphi(\bar{y}_F) - \bar{p}_F\bar{y}_F.$$

Der Makler, dessen Einkommen sich zu  $\bar{p}_F(f(\bar{x}) - \bar{y}_F) + \bar{p}_P(g(\bar{x}) + z_P^0)$  beläuft, hat dagegen am Erlös  $\varphi(\bar{x})$  keinen Anteil. Die Bedingungen (6-37) zeigen, daß sein Einkommen gleich Null ist. Dies bestätigt seine Funktion als Ersatz des Wettbewerbsmarktes, die in der Herbeiführung des wertmäßigen Ausgleichs von Angebot und Nachfrage besteht.

6.4.5 Eine weitergehende Aufspaltung der Entscheidungsinstanzen kann möglich sein, wenn die Technologie eine spezielle Struktur aufweist oder die Umsatzfunktion  $\varphi(y_F)$  sich additiv aus Funktionen  $\varphi_i((y_F)_i)$  zusammensetzt. Hier soll nur der Fall einer speziellen Produktionsstruktur betrachtet werden. Die Produktion soll sich in  $L$  "Abteilungen" der Wirtschaftseinheit vollziehen, wobei die  $\lambda$ -te Abteilung über  $n_\lambda$

Basisprozesse ( $\lambda = 1, 2, \dots, L$ ;  $j_\lambda = 1, 2, \dots, n_\lambda$ ) verfügen möge. Die Prozesse einer jeden Abteilung sollen unabhängig von den Prozeßgraden der Aktivitäten aller übrigen Abteilungen sein; es seien also keine externen Wirtschaftlichkeiten oder Unwirtschaftlichkeiten bezüglich der Produktionsabteilungen vorhanden. Die Technologie  $A(x)$  hat dann das Aussehen:

$$(6-41) \quad A(x) = \left\| A^1(x^1), \dots, A^L(x^L) \right\| = \left\| \begin{matrix} f_{i1}^{j_\lambda}(x^\lambda) \\ g_{k1}^{j_\lambda}(x^\lambda) \end{matrix} \right\|,$$

worin  $x = (x^1, \dots, x^L)$ ,  $\sum_\lambda n_\lambda = n$  und  $\lambda = 1, 2, \dots, L$  sowie  $j_\lambda = 1, 2, \dots, n_\lambda$  gesetzt ist. Ferner sei

$$(6-42) \quad f^\lambda(x^\lambda) = \left( \sum_{j_\lambda} f_{i1}^{j_\lambda}(x^\lambda), \dots, \sum_{j_\lambda} f_{ir}^{j_\lambda}(x^\lambda) \right),$$

$$g^\lambda(x^\lambda) = \left( \sum_{j_\lambda} g_{k1}^{j_\lambda}(x^\lambda), \dots, \sum_{j_\lambda} g_{ks}^{j_\lambda}(x^\lambda) \right)$$

sowie

$$(6-43) \quad f(x) = \sum_\lambda f^\lambda(x^\lambda); \quad g(x) = \sum_\lambda g^\lambda(x^\lambda).$$

Die Bedingungen (6-36a) lauten dann:

$$(6-44) \quad \bar{p}_F F^\lambda(\bar{x}^\lambda) + \bar{p}_G G^\lambda(\bar{x}^\lambda) \leq 0; \quad (\bar{p}_F F^\lambda(\bar{x}^\lambda) + \bar{p}_G G^\lambda(\bar{x}^\lambda)) \bar{x}^\lambda = 0,$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, L.$$

Hieraus folgt, daß sich die Funktion des Produktionsmanagers auflösen und auf "Prozeßmanager" delegieren läßt, deren jeder für die Produktion einer Abteilung verantwortlich ist und nur die Preise  $\bar{p}$  sowie die Matrix  $A^\lambda(x^\lambda)$  der eigenen ( $\lambda$ -ten) Abteilung zu kennen braucht. (Der Ausdruck "Prozeßmanager" ist nicht ganz zutreffend, da eine Abteilung aus mehreren Prozessen bestehen kann. Jedoch ist der Fall  $n_\lambda = 1$  für alle  $\lambda$  - dies ist der von Arrow/Hurwicz <sup>104/</sup> untersuchte Spezialfall - besonders wichtig.)

Aufgabe des Prozeßmanagers der  $\lambda$ -ten Abteilung ist es, die Funktion  $\bar{p}_F f^\lambda(x^\lambda) + \bar{p}_G g^\lambda(x^\lambda)$  bei gegebenen Schattenpreisen  $\bar{p}$

unter der einzigen Bedingung nichtnegativer Prozeßgrade  $x^\lambda$  zu maximieren. Ist  $\bar{x}^\lambda$  ( $\lambda=1,2,\dots,L$ ) eine Lösung dieses Problems, so stellt  $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^L)$  eine Lösung des Problems, die Funktion  $p_F f(x) + p_{Pg}(x)$  für  $x \geq 0$  zu maximieren, dar. Ist jeder Prozeßmanager darauf bedacht, den imputierten Nettowert der Produktion seiner Abteilung zu maximieren, so resultiert zugleich ein Maximum des zugerechneten Nettowertes der Gesamtproduktion. Seine Entscheidungen trifft der Prozeßmanager nach den bereits für den Produktionsmanager entwickelten Regeln.

Dieses Modell mit Dezentralisation der Planung wird in einer anderen sachlichen Deutung im Kapitel 7 ausführlich behandelt. <sup>105/</sup>

## Kapitel 7

### Pareto-Optima und allgemeines Gleichgewicht

#### im endlichen nichtlinearen Gleichgewichtsmodell

#### 7.1 Effizienz im allgemeinen Gleichgewichtsmodell

7.1.1 Die bei der Definition vektormaximaler Punkte (vgl. Definition 1.1, S. 20) verwendete Ordnungsrelation  $\geq$  für Vektoren beruht auf der natürlichen Anordnung der reellen Zahlen. Der Begriff der Maximalität wird indes in der Wirtschaftstheorie häufig in allgemeinerer Form benötigt.

Unter  $\Delta$  wird eine Menge  $\{z \mid z = (z^1, \dots, z^R)\}$  in  $E_Z$  und unter  $\Delta_Q$  ihre orthogonale Projektion in den euklidischen Raum

$E_{z^Q}$  ( $Q=1,2,\dots,R$ ) verstanden. Die Elemente  $z^Q$  von  $\Delta_Q$  seien mittels einer vollständigen Ordnungsrelation  $\succeq_Q^*$  geordnet. Gilt die Beziehung  $\bar{z}^Q \succeq_Q^* \bar{\bar{z}}^Q$ , so heißt  $\bar{z}^Q$  besser als  $\bar{\bar{z}}^Q$ . Ist  $\bar{z}^Q$  besser als  $\bar{\bar{z}}^Q$  und zugleich  $\bar{\bar{z}}^Q$  besser als  $\bar{z}^Q$ , so nennen wir  $\bar{z}^Q$  und  $\bar{\bar{z}}^Q$  indifferent und schreiben symbolisch  $\bar{z}^Q \succeq_Q^* \bar{\bar{z}}^Q$ . Auf der Menge  $\Delta$  werden abgeleitete Ordnungsrelationen eingeführt:

Definition 7.1: Sind  $\bar{z} = (\bar{z}^1, \bar{z}^2, \dots, \bar{z}^R)$  und  $\bar{\bar{z}} = (\bar{\bar{z}}^1, \bar{\bar{z}}^2, \dots, \bar{\bar{z}}^R)$  irgendzwei Elemente von  $\Delta$ , so heißt

- (a)  $\bar{z}$  besser als  $\bar{\bar{z}}$ , symbolisch:  $\bar{z} \succeq^* \bar{\bar{z}}$ , wenn für alle  $Q=1,2,\dots,R$  die Relation  $\bar{z}^Q \succeq_Q^* \bar{\bar{z}}^Q$  gilt;
- (b)  $\bar{z}$  halbstrikt besser als  $\bar{\bar{z}}$ , symbolisch:  $\bar{z} \succeq^* \bar{\bar{z}}$ , wenn  $\bar{z} \succeq^* \bar{\bar{z}}$  gilt und für mindestens ein  $Q$  die Vektoren  $\bar{z}^Q$  und  $\bar{\bar{z}}^Q$  nicht indifferent sind;
- (c)  $\bar{z}$  strikt besser als  $\bar{\bar{z}}$ , symbolisch:  $\bar{z} \succ^* \bar{\bar{z}}$ , wenn  $\bar{z} \succeq^* \bar{\bar{z}}$  ist und für kein  $Q$  die Vektoren  $\bar{z}^Q$  und  $\bar{\bar{z}}^Q$  indifferent sind.

Definition 7.2: Ein Element  $\bar{z}$  aus  $\Delta$  heißt \*-maximal oder \*-effizient, kurz: maximal oder effizient, auf  $\Delta$ , wenn kein  $\bar{\bar{z}} \in \Delta$  mit der Eigenschaft existiert, daß  $\bar{\bar{z}} \succeq^* \bar{z}$  gilt. <sup>106/</sup>

Genügen die Ordnungsrelationen  $\succeq_Q^*$  gewissen Stetigkeitsannahmen, die Debreu näher beschrieben hat, so lassen sie sich durch stetige reelle Funktionen  $\varphi_Q(z^Q)$  darstellt darstellen, daß  $\bar{z}^Q \succeq_Q^* \bar{\bar{z}}^Q$  dann und nur dann gilt, wenn  $\varphi_Q(\bar{z}^Q) \geq \varphi_Q(\bar{\bar{z}}^Q)$  ist. <sup>107/</sup> Ersetzt man in Definition 7.2 die Relationen  $\succeq_Q^*$  durch die natürliche Anordnung zwischen den Werten der  $\varphi_Q$ -Funktionen, so gelangt man zum Begriff der funktionalen Effizienz von Charnes / Cooper <sup>108/</sup>.

Definition 7.3: Ein Element  $\bar{z}$  aus  $\Delta$  heißt funktional effizient, kurz: effizient, wenn es kein Element  $\bar{\bar{z}}$  aus  $\Delta$  mit der Eigenschaft gibt, daß  $f(\bar{z}) \geq f(\bar{\bar{z}})$  gilt, wobei  $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_R)$  ist.

Auf die funktionale Effizienz lassen sich die bereits bekannten Methoden der mathematischen Programmierung anwenden. Ist  $\bar{z} \in \Delta$  funktional effizient auf  $\Delta$ , so ist  $f(\bar{z})$  gemäß Definition 1.1 maximal auf der Menge  $\{f \mid f(z), z \in \Delta\}$ . Umgekehrt gehört zu jedem nach Definition 1.1 maximalen Element  $\bar{f}$  mindestens ein funktional in  $\Delta$  effizienter Punkt  $\bar{z}$ .

Handelt es sich bei den Ordnungsrelationen  $\succeq_Q^*$  um ordinale Präferenzordnungen und bei den Funktionen  $\varphi_Q$  um Nutzen-Indexfunktionen von Verbrauchern, so spricht man anstelle von Effizienz von Pareto-Optimalität. Der Begriff der Pareto-Optimalität wird im folgenden an einem prozeßanalytisch formulierten Gleichgewichtsmodell einer geschlossenen Volkswirtschaft erläutert. Zugrundegelegt wird ein Spezialfall des Gleichgewichtsmodells von Arrow/Debreu 109/, der sich als zwanglose Erweiterung des bisher behandelten Produktionsmodells ergibt. Die prozeßanalytische Formulierung ist weniger abstrakt als die mengentheoretische Fassung von Arrow/Debreu.

7.1.2 Das Gleichgewichtsmodell berücksichtigt  $L$  Produzenten und  $R$  Konsumenten. Die technologische Produktionsstruktur des  $\lambda$ -ten Produzenten wird durch eine Matrix  $A^\lambda(x^\lambda)$  der in 6.4.5 erklärten Art - den dortigen Abteilungen entsprechen jetzt die Produzenten - beschrieben, also

$$(7-1) \quad A^\lambda(x^\lambda) = \begin{pmatrix} f_{i1}^{j_\lambda}(x^\lambda) \\ \vdots \\ f_{is}^{j_\lambda}(x^\lambda) \\ g_k^{j_\lambda}(x^\lambda) \end{pmatrix}, \quad x^\lambda \in \Omega_\lambda,$$

worin  $i=1,2,\dots,r$  den Index der Konsumgüter,  $k=1,2,\dots,s$  den Index der Produktionsmittel in der Volkswirtschaft und  $j_\lambda=1,2,\dots,n_\lambda$  den Index über die dem  $\lambda$ -ten Produzenten zur Verfügung stehenden Aktivitäten bedeutet. Die Funktionen  $f^\lambda(x^\lambda)$ ,  $g^\lambda(x^\lambda)$  sowie  $f(x)$  und  $g(x)$  sind in 6.4.5 erklärt worden.  $\Gamma_\lambda \subseteq \Omega_\lambda$  bedeute die Menge der einzelwirtschaftlich möglichen Aktivitätsgrade  $x^\lambda$ , auf welche die  $x^\lambda$  aus technologischen Gründen - z.B. einzelwirtschaftlichen Kapazitätsgrenzen - beschränkt sind.

Es wird unterstellt, daß nur finale Güter einen Nutzen für die Verbraucher besitzen. (Dies schließt nicht aus, daß auch primäre Güter Nutzen stiften können; nur sind dann künstliche Aktivitäten einzuführen, die eine Einheit des primären Gutes  $G$  in eine Einheit des finalen Gutes  $G$  konvertieren.) Die durch die Relation  $\succeq_q^*$  ausgedrückte Präferenzordnung des  $q$ -ten Konsumenten ( $q=1,2,\dots,R$ ) sei auf einer Menge  $\Lambda_q$  in  $E_r^+$  definiert. Die bei hinreichend stetigen Präferenzordnungen existierenden Nutzen-Indexfunktionen  $u_q = u_q(y_F^q)$ ,  $y_F^q \in \Lambda_q$ , werden zu der auf der Menge  $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_R$  erklärten gesamtwirtschaftlichen Nutzenfunktion  $u(y_F) = (u_1(y_F^1), u_2(y_F^2), \dots, u_R(y_F^R))$  vereinigt, wobei  $y_F = (y_F^1, y_F^2, \dots, y_F^R)$  ist.

Die Anfangsbestände an Produktionsmitteln sollen sich in der Hand der Verbraucher befinden.  $z_P^q$  bezeichnet den Anfangsbestand beim  $q$ -ten Konsumenten, so daß sich der gesamtwirtschaftliche Anfangsbestand  $z_P^0 = \sum_q z_P^q$  ergibt. Dagegen seien an finalen Gütern keine Anfangsbestände vorhanden. Das Einkommen des  $q$ -ten Verbrauchers setzt sich aus dem Wert der von ihm an die Unternehmungen verkauften Mengenkombinationen  $y_P^q$  an primären Gütern und aus dem Wert seines relativen Anteils  $\alpha_{\lambda q}$  am Nettoerlös der  $\lambda$ -ten Unternehmung zusammen. Die von Arrow / Debreu <sup>110/</sup> eingeführten Größen  $\alpha_{\lambda q}$  beschreiben die institutionell regulierte Aufteilung der Residualeinkommen der Produktionseinheiten auf die Haushalte und unterliegen den Beschränkungen  $\alpha_{\lambda q} \geq 0$ ,  $\sum_q \alpha_{\lambda q} = 1$  ( $\lambda=1,2,\dots,L$ ). Die letzte Bedingung besagt, daß Gewinnanteile nicht in den Produktionseinheiten thesauriert werden können. Verwendet wird das Haushaltseinkommen zum Erwerb der finalen Güter von den Unternehmungen. Die Gesamtmenge der von den Verbrauchern gekauften finalen Güter ergibt sich zu  $y_F^0 = \sum_q y_F^q$ , die Gesamtmenge der von ihnen verkauften primären Güter zu  $y_P^0 = \sum_q y_P^q$ . Möglich sind für den  $q$ -ten Verbraucher alle Vektoren  $y^q = (y_F^q, y_P^q)$ , die den Bedingungen  $y_F^q \in \Lambda_q$  und  $0 \leq y_P^q \leq z_P^q$  genügen.

Im vorliegenden Modell sind einzelwirtschaftlich mögli -

che und gesamtwirtschaftlich zulässige Vektoren zu unterscheiden.

Definition 7.4: Die Vektoren  $x = (x^1, x^2, \dots, x^L)$  und  $y_F = (y_F^1, y_F^2, \dots, y_F^R)$  heißen zulässig, wenn ihre Komponenten einzeln wirtschaftlich möglich sind und die Bedingungen

$$(7-2) \quad f(x) - y_F^0 \geq 0 \quad \text{und} \quad g(x) + z_P^0 \geq 0$$

mit  $y_F^0 = \sum_Q y_F^Q$  erfüllt sind.

Die Menge der zulässigen Vektorpaare  $(x, y_F)$  wird mit  $Z$  bezeichnet, ihre Projektion in den Raum  $E_x$  mit  $X$ , ihre Projektion in den Raum  $E_{y_F}$  mit  $Y_F$ .

7.1.3 Die Annahmen über die Präferenzordnungen der Verbraucher lauten:

P 1 a: Die Mengen  $\Lambda_Q \subseteq E_r^+$  sind nichtleer.

b: Die Mengen  $\Lambda_Q$  sind konvex.

c: Die Mengen  $\Lambda_Q$  sind abgeschlossen.

P 2: Auf  $\Lambda_Q$  ist eine vollständige Ordnungsrelation (Präferenzrelation)  $\geq_Q^*$  definiert:

a: Für jedes Paar von Punkten  $y_F^Q, \bar{y}_F^Q \in \Lambda_Q$  gilt mindestens eine der Beziehungen

$$y_F^Q \geq_Q^* \bar{y}_F^Q \quad \text{oder} \quad \bar{y}_F^Q \geq_Q^* y_F^Q.$$

b: Für  $y_F^Q, \bar{y}_F^Q, \bar{\bar{y}}_F^Q \in \Lambda_Q$  folgt aus  $y_F^Q \geq_Q^* \bar{y}_F^Q$  und  $\bar{y}_F^Q \geq_Q^* \bar{\bar{y}}_F^Q$  stets die Beziehung  $y_F^Q \geq_Q^* \bar{\bar{y}}_F^Q$  (Transitivität).

P 3 a: In  $E_r^+$  existiert für jedes  $q = 1, 2, \dots, R$  eine stetige reelle Funktion  $u_q(y_F^Q)$ , die auf  $\Lambda_Q$  die Präferenzordnung des  $q$ -ten Verbrauchers bewahrt (Nutzen-Indexfunktion).

b:  $u_q(y_F^Q)$  ist in  $\Lambda_Q$  konkav.

c\*:  $u_q(y_F^Q)$  ist in  $E_r^+$  differenzierbar.

P 4: Gibt es zu  $\bar{y}_F^Q \in \Lambda_Q$  ein  $\hat{y}_F^Q \in \Lambda_Q$  mit  $\hat{y}_F^Q >^*_Q \bar{y}_F^Q$  <sup>111/</sup>,  
so existieren für jedes reelle  $\varepsilon > 0$  Punkte  $y_F^Q \in \Lambda_Q$   
mit  $y_F^Q \in U(\bar{y}_F^Q, \varepsilon)$  und  $y_F^Q >^*_Q \bar{y}_F^Q$ , worin  $U()$  eine  
 $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes  $\bar{y}_F^Q$  bedeutet.

Mitunter werden einige Verschärfungen dieser Postulate gebraucht:

P 1\*: Es ist  $\Lambda_Q = E_r^+$ .

P 4\*: Gibt es zu  $\bar{y}_F^Q \in \Lambda_Q$  ein  $\hat{y}_F^Q \in \Lambda_Q$  mit  $\hat{y}_F^Q >^*_Q \bar{y}_F^Q$ , so  
gilt für jedes  $\delta$  mit  $0 < \delta < 1$

$$\delta \hat{y}_F^Q + (1 - \delta) \bar{y}_F^Q >^*_Q \bar{y}_F^Q.$$

Die ökonomisch wesentlichen Annahmen sind P 2 und P 4 bzw. P 4\*. Die Annahme P 2 fordert die Existenz einer vollständigen transitiven Präferenzordnung in  $\Lambda_Q$  für jeden Verbraucher. Man beachtet, daß die Relation " $\geq$ " der partiellen Ordnung des  $r$ -dimensionalen Raumes  $E_r$ , die uns bisher als "Präferenz"relation gedient hat, für  $r \geq 2$  keine vollständige Ordnungsrelation im Sinne des Postulats P 2 darstellt. Trotzdem sind die bisherigen Modelle, die auf dieser Relation beruhen, in der gegenwärtigen allgemeinen Formulierung enthalten. Dazu ist in den früheren Modellen jedes der  $r$  finalen Güter genau einem Verbraucher zuzuweisen ( $R = r$ ) und für  $\Lambda_Q$  die reelle Halbachse  $E_1^+$  zu wählen. Die natürliche Anordnung der reellen Zahlen stellt eine spezielle Präferenzrelation im Sinne des Postulats P 2 dar, und sämtliche übrigen Annahmen sind gleichfalls erfüllt.

Die Annahmen P 4 und P 4\* beziehen sich auf die Stetigkeit des Phänomens der Ungesättigtheit der Verbraucher. Ist der Verbraucher in einem Punkt  $\bar{y}_F^Q$  global ungesättigt, so ist er zugleich lokal-ungesättigt in  $\bar{y}_F^Q$ , d.h. in jeder Umgebung  $U(\bar{y}_F^Q, \varepsilon)$  dieses Punktes liegen strikt vorgezogene Warenkörbe  $y_F^Q \in \Lambda_Q$ .

Die Annahmen P 3 a - c\* sind Regularitätsbedingungen, die im Hinblick auf die in Kapitel 5 entwickelte Theorie benötigt werden, die Beweise der in Abschnitt 7.2 dargestellten Theoreme vereinfachen, in allgemeineren Modellen jedoch wesentlich abgeschwächt werden können. Namentlich erscheint die Annahme der Konkavität der Nutzen-Indexfunktion ökonomisch bedenklich. Gewöhnlich wird auf Grund der Struktur der Präferenzordnung nur die Quasi-Konkavität dieser Funktionen vorausgesetzt.<sup>112/</sup> Vom rein mathematischen Standpunkt ist die Konkavitätsannahme weniger bedenklich, da unter schwachen Voraussetzungen, deren Darstellung jedoch etwas verwickelt ist, eine quasi-konkave Funktion  $\phi$  durch eine monotone Transformation  $\psi$  in eine konkave Funktion  $(\psi\phi)$  überführt werden kann.<sup>113/</sup> Arrow / Enthoven haben den Satz 5.4 für  $r=1$  auf quasi-konkave Zielfunktionen verallgemeinert.<sup>114/</sup> Allerdings ist das Vektor-Maximum-Problem für diesen Fall noch nicht gelöst worden.

#### 7.1.4 Annahmen über die technologische Struktur der Produktion.

Obschon eine einzelwirtschaftlich organisierte Volkswirtschaft unterstellt wird, empfiehlt es sich, von den einzelwirtschaftlichen technologischen Strukturen nur zu fordern, daß der durch ihre Zusammenfassung resultierende gesamtwirtschaftliche Produktionsraum bestimmte Regularitätseigenschaften besitzt. Wir setzen  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_L$  sowie  $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_L$  und definieren  $f(x) = \sum_{\lambda} f^{\lambda}(x^{\lambda})$  sowie  $g(x) = \sum_{\lambda} g^{\lambda}(x^{\lambda})$ . Wir verlangen, daß  $\Omega$ ,  $f$  und  $g$  die in 6.1.4 (vgl. S. 128-129) genannten Annahmen T 1 bis T 5 erfüllen. Mitunter werden auch die Annahmen T 1\* und T 2c\* (vgl. S. 132) herangezogen. Die Regularitätsbedingungen T 6, T 6\* und P 3 werden jeweils gesondert neuformuliert.

### 7.2 Pareto-Optima und Gleichgewicht bei Wettbewerb

7.2.1 Zwei Teilmengen ausgezeichnete Punkte aus der Menge der zulässigen Vektoren  $(x, y_F)$  stehen seit langem im Mittelpunkt der katallaktischen Wirtschaftstheorie, - die

Menge der pareto-optimalen Punkte und die Menge der ein Gleichgewicht bei Wettbewerb definierenden Punkte.

Definition 7.5: Ein zulässiges Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  aus  $Z$  heißt pareto-optimal, wenn es kein Vektorpaar  $(x, y_F) \in Z$  gibt, so daß die Beziehung  $y_F \geq^* \bar{y}_F$  nach Definition 7.1 erfüllt ist.

Existiert eine gesamtwirtschaftliche Nutzenfunktion  $u = u(y_F)$ , so definiert  $\bar{y}_F$  ein Vektormaximum von  $u$  auf  $u(y_F)$ .

Definition 7.6: Das Vektortripel  $(\hat{x}, \hat{y}_F, \hat{p})$  definiert ein Gleichgewicht bei Wettbewerb, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

(a)  $(\hat{x}, \hat{y}_F)$  sind zulässig nach Definition 7.4;  $\hat{p} = (\hat{p}_F, \hat{p}_P)$  ist semipositiv.

(b) Es gilt  $\hat{p}_F(f(\hat{x}) - \hat{y}_F^0) = 0$  und  $\hat{p}_P(g(\hat{x}) + z_P^0) = 0$ .

(c) Für alle  $\lambda = 1, 2, \dots, L$  gilt

$$(7-3) \quad \hat{p}_F f^\lambda(\hat{x}^\lambda) + \hat{p}_P g^\lambda(\hat{x}^\lambda) = \max_{\Gamma_\lambda} \hat{p}_F f^\lambda(x^\lambda) + \hat{p}_P g^\lambda(x^\lambda) \quad .$$

(d) Für alle  $q = 1, 2, \dots, R$  gilt

$$(7-4) \quad \hat{y}_F^0 \geq^* y_F^0 \quad \text{für alle } y_F^0 \in \hat{\Lambda}_q,$$

wobei

$$(7-5) \quad \hat{\Lambda}_q = \left\{ y_F^0 \mid \hat{p}_F y_F^0 \leq \hat{p}_P z_P^0 + \sum_{\lambda \in \Lambda_q} (\hat{p}_F f^\lambda(\hat{x}^\lambda) + \hat{p}_P g^\lambda(\hat{x}^\lambda)), y_F^0 \in \Lambda_q \right\}$$

Die Bedingung (a) der Definition 7.6 besagt, daß die Vektoren  $(\hat{x}, \hat{y}_F)$  einzelwirtschaftlich möglich sein müssen und bei den gegebenen Faktorbeständen gesamtwirtschaftlich realisierbar sind. Das Preissystem  $\hat{p}$  wird wiederum als ein Vektor Lagrangescher Multiplikatoren konstruiert; die Preise können nicht negativ sein. Eine Normierung  $e\hat{p} = \text{const.}$ , welche die Höhe des Preisniveaus festlegt, kann, muß aber nicht vorgenommen werden. Die erste Bedingung (b) beinhaltet zusammen

mit der Bedingung (a), daß der Marktwert der Überschußnachfrage (excess demand) nach jedem einzelnen Konsumgut gleich Null sein muß. Die zweite Bedingung (b) kann auch in der Form  $\hat{p}_P(\hat{y}_P^0 + g(\hat{x})) + \hat{p}_P(z_P^0 - \hat{y}_P^0) = 0$  geschrieben werden, woraus

$$(7-6) \quad (a) \quad \hat{p}_P(\hat{y}_P^0 + g(\hat{x})) = 0, \quad (b) \quad \hat{p}_P(z_P^0 - \hat{y}_P^0) = 0$$

folgt. Nach Bedingung (7-6a) ist der Marktwert der Überschußnachfrage nach jedem primären Gut gleich Null, und nach (7-6b) ist im Gleichgewicht der Marktwert der Überschußbestände jedes Haushalts an primären Gütern ebenfalls gleich Null. Es gilt also  $\hat{p}_P \hat{y}_P^0 = \hat{p}_P z_P^0$ . Nach Bedingung (c) ist der Marktwert des Nettoerlöses jeder Produktionsunternehmung im Gleichgewicht ein Maximum bezüglich der Menge der einzelwirtschaftlichen Produktionsalternativen. Damit ist zugleich der Nettowert der Gesamtproduktion der Volkswirtschaft auf der Menge  $\Gamma$  im Maximum. Nach der Bedingung (d) befindet sich jeder Verbraucher im Gleichgewicht, da er im Rahmen seiner Budgetbeschränkung (7-5) gemäß (7-4) einen Punkt höchster Präferenz erreicht hat.

Unter passenden Regularitätsbedingungen stellt jedes Gleichgewicht bei Wettbewerb zugleich einen Zustand der Pareto-Optimalität dar, und umgekehrt gehört auf Grund des Dualitätsprinzips zu jedem Pareto-Optimum bei passender Einkommensverteilung ein Gleichgewicht bei Wettbewerb. Es ist nicht der Zweck dieser Arbeit, die große ökonomische Bedeutung dieser Aussagen darzulegen; deshalb sei vielmehr auf die Arbeiten von Koopmans<sup>115/</sup> und Dorfman / Samuelson / Solow<sup>116/</sup> verwiesen. Hier ist nur das formale Konzept der Effizienz und der Einsatz des Dualitätsprinzips zu diskutieren.

7.2.2 Ein Beispiel für die Anwendung des Begriffs der \*-Effizienz (vgl. Definition 7.2) bietet der folgende

Satz 7.1 (Debreu): Das Vektortripel  $(\hat{x}, \hat{y}_F, \hat{p})$  beschreibe ein Gleichgewicht bei Wettbewerb. Sind sämtliche Verbraucher im Punkte  $\hat{y}_F = (\hat{y}_F^1, \hat{y}_F^2, \dots, \hat{y}_F^R)$  ungesättigt und erfüllen ihre Präferenzordnungen P 1a, P 2 und P 4, so stellt der Punkt  $(\hat{x}, \hat{y}_F)$  ein Pareto-Optimum dar.

Beweis.

Nach Definition 7.6(d) gilt für alle  $y_F^Q \in \hat{\Lambda}_Q$  die Beziehung  $y_F^Q \leq_Q^* \hat{y}_F^Q$ . Aus  $y_F^Q >_Q^* \hat{y}_F^Q$  folgt mithin  $y_F^Q \notin \hat{\Lambda}_Q$ , d.h.

$$(7-7) \quad \hat{p}_F y_F^Q > \hat{p}_P z_P^O + \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda Q} (\hat{p}_F f^{\lambda}(\hat{x}^{\lambda}) + \hat{p}_P g^{\lambda}(\hat{x}^{\lambda})).$$

Aus  $\tilde{y}_F^Q =_Q^* \hat{y}_F^Q$  folgt, wie zu zeigen ist, überdies

$$(7-8) \quad \hat{p}_F \tilde{y}_F^Q \geq \hat{p}_P z_P^O + \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda Q} (\hat{p}_F f^{\lambda}(\hat{x}^{\lambda}) + \hat{p}_P g^{\lambda}(\hat{x}^{\lambda})).$$

Wegen der Ungesättigtheit des q-ten Verbrauchers existiert nämlich in  $\Lambda_Q$  ein Punkt  $\tilde{y}_F^Q$  mit  $\tilde{y}_F^Q >_Q^* \hat{y}_F^Q$  und nach P 2 mit  $\tilde{y}_F^Q >_Q^* \tilde{y}_F^Q$ . Nach Annahme P 4 gibt es daher in jeder Umgebung von  $\tilde{y}_F^Q$  in  $\Lambda_Q$  Punkte, die gegenüber  $\tilde{y}_F^Q$  vorgezogen werden und für die nach P 2 infolgedessen die Ungleichung (7-7) gilt.  $\tilde{y}_F^Q$  selbst muß daher die Ungleichung (7-8) befriedigen.

Angenommen, es gäbe ein zulässiges Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$ , für welches  $\bar{y}_F \geq^* \hat{y}_F$  gilt. Gemäß (7-7) und (7-8) ergibt sich dann die Ungleichung

$$(7-9) \quad \hat{p}_F \bar{y}_F^O > \hat{p}_P z_P^O + \hat{p}_F f(\hat{x}) + \hat{p}_P g(\hat{x}).$$

Andererseits aber muß, da  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  zulässig sein soll, nach der Bedingung (c) der Definition 7.6

$$(7-10) \quad \hat{p}_F \bar{y}_F^O - \hat{p}_P z_P^O \leq \hat{p}_F f(\bar{x}) + \hat{p}_P g(\bar{x}) \leq \hat{p}_F f(\hat{x}) + \hat{p}_P g(\hat{x})$$

gelten, woraus ein Widerspruch resultiert, q.e.d.

Der hier gegebene Beweis stammt im wesentlichen von Debreu<sup>117/</sup>, eine verbale Fassung des Arguments findet sich bei Koopmans<sup>118/</sup>. Der Beweis Karlins<sup>119/</sup> ist zu restriktiv, da er die Existenz und die strenge Konkavität der Nutzenfunktionen  $u_Q(y_F^Q)$  erfordert.

7.2.3 Zum Beweis der Umkehrung des Theorems 7.1 sind strengere Annahmen über die Struktur der Verbraucherpräferenzen und der Technologie zu treffen. Wir geben folgende Hilfssätze:

Lemma 7.1: Die Funktionen  $f(x) + y_F^0$  und  $g(x) + z_P^0$  seien unter den Annahmen T 1\* und T 2a, c\* im Punkte  $(\bar{x}, \bar{y}_F) \in Z$  bezüglich  $Z$  K-T-regulär. Stellt der Punkt  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  bei Gültigkeit der Annahmen P 1\*, P 2 und P 3a, c\* dann ein eigentliches Pareto-Optimum dar, d.h., besitzt die Funktion  $u = u(y_F)$  in  $\bar{y}_F$  ein eigentliches Vektormaximum auf  $u(y_F)$  (vgl. S. 117), so existieren Vektoren  $v^0 = (v_Q^0) > 0$  und  $\bar{p} = (\bar{p}_F, \bar{p}_P) \geq 0$ , welche die Bedingungen

$$(7-11) \quad (v_Q^0 U_Q(\bar{y}_F^0) - \bar{p}_F)(y_F^0 - \bar{y}_F^0) \leq 0 \quad \text{für alle } y_F^0 \in \Delta_Q, \\ Q = 1, 2, \dots, R,$$

$$(7-12) \quad (\bar{p}_F F^\lambda(\bar{x}^\lambda) + \bar{p}_P G^\lambda(\bar{x}^\lambda))(x^\lambda - \bar{x}^\lambda) \leq 0 \quad \text{für alle } x^\lambda \in \Gamma_\lambda, \\ \lambda = 1, 2, \dots, L$$

und

$$(7-13) \quad \bar{p}_F(f(\bar{x}) - \bar{y}_F^0) = 0, \quad \bar{p}_P(g(\bar{x}) + z_P^0) = 0$$

erfüllen.

Der Beweis ergibt sich durch unmittelbare Anwendung des Lemmas 5.9 (vgl. S. 118).

Lemma 7.2: Die Behauptung des Lemmas 7.1 gilt auch unter den Annahmen T 1a, b, T 2a, b, c\*, P 1a, b, P 2, P 3a, b, c\*, sofern Vektoren  $(^0x, ^0y_F) \in Z$  mit  $f(^0x) - ^0y_F^0 > 0$  und  $g(^0x) + z_P^0 > 0$  sowie Vektoren  $(^\sigma x, ^\sigma y_F) \in Z$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, R$ ) mit der Eigenschaft, daß  $u_Q(^0y_F^0) > u_Q(^{\sigma}y_F^0)$  für jedes  $Q \neq \sigma$  gilt, vorhanden sind.

Der Beweis ergibt sich aus Satz 5.4 und Bemerkung 2 von 5.2.3

Die Hypothese des Lemmas 7.1, daß  $u(\bar{y}_F)$  ein eigentliches Vektormaximum auf  $u(y_F)$  ist, besagt, daß die Erhöhung des Nutzens irgendeines Verbrauchers die Verminderung des Nutzens mindestens eines anderen Verbrauchers in nicht nur höherer als der ersten Ordnung nach sich zieht. Die Annahme eines zulässigen Vektorpaares  $(^0x, ^0y_F)$  im Lemma 7.2 stellt eine naheliegende Kompatibilitätsbedingung zwischen der Struktur

der Präferenzen und der Technologie dar. Die Voraussetzung der Existenz von Vektoren  $(\sigma_x, \sigma_{y_F})$ ,  $\sigma=1,2,\dots,R$ , ist nicht so durchsichtig; ihr zufolge soll es zulässige Vektoren  $(\sigma_x, \sigma_{y_F})$  geben, so daß jeder Verbraucher außer dem  $\sigma$ -ten im Punkte  $\sigma_{y_F}$  besser gestellt ist als im pareto-optimalen Punkt  $\bar{y}_F$ .

Die in (7-11) auftretenden Faktoren  $v_q^0 > 0$  haben die Aufgabe, die Nutzen-Indexfunktionen der einzelnen Verbraucher untereinander vergleichbar (addierbar) zu machen. Betrachtet man den Nutzen als ein abstraktes Gut, das durch die Transformation  $u_q = u_q(y_F^0)$  aus der Mengenkombination  $y_F^0$  der Konsumgüter hervorgeht, so sollen die  $v_q^0$  die Güter  $u_q$  ( $q=1,2,\dots,R$ ) im Hinblick auf ein gegebenes eigentliches Pareto-Optimum auf eine gemeinsame Maßskala zurückführen; diese Faktoren stellen den reziproken Wert des (verallgemeinerten) Grenznutzens des Geldes dar. Unter den Voraussetzungen des Lemmas 7.1 sind die Restriktionen (7-11) in der Tat Ausdruck des Gesetzes, daß der zum reziproken Wert des Grenznutzens des Geldes bewertete Grenznutzen eines Konsumgutes bei keinem Individuum den Marktpreis für das betreffende Gut überschreiten darf. Unterschreitet er ihn, so wird das betreffende Gut im Optimum vom Verbraucher nicht gekauft. Hieraus erhält man im Falle eines positiven Marktpreises des ersten Gutes die klassische Verhaltensregel für Verbraucher, daß im Optimum das Verhältnis des Grenznutzens des  $i$ -ten Gutes zum Grenznutzen des ersten Gutes niemals größer ist als das Preisverhältnis beider Güter.

Auf den Hilfssätzen 7.1 und 7.2 beruht der

Satz 7.2: Das Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{y}_F) \in Z$  beschreibe ein Pareto-Optimum. Ist im Punkte  $\bar{y}_F$  mindestens ein Verbraucher ungesättigt, so existiert bei Gültigkeit der Voraussetzungen des Lemmas 7.1 und der Annahmen T 2b und P 3b oder bei Gültigkeit der Voraussetzungen des Lemmas 7.2 ein Preissystem  $\bar{p}$  derart, daß das Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{y}_F, \bar{p})$  bei passender Einkommensverteilung in der Volkswirtschaft ein Gleichgewicht bei Wettbewerb darstellt. 120/

Beweis. <sup>121/</sup>

Anwendung des Lemmas 7.1 oder des Lemmas 7.2 ergibt die Existenz von Vektoren  $v^0 > 0$  und  $\bar{p} \geq 0$ , welche die Bedingungen (7-11) bis (7-13) befriedigen. Es werden die Bedingungen (a) bis (d) der Definition 7.6 verifiziert.

(a) Das Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  ist per definitionem zulässig. Das Preissystem  $\bar{p}$  ist von Null verschieden, denn aus Annahme P 3b resultiert in Verbindung mit (7-11) die Ungleichung

$$(7-14) \quad v_Q^0 (u_Q(y_F^Q) - u_Q(\bar{y}_F^Q)) \leq \bar{p}_F (y_F^Q - \bar{y}_F^Q)$$

für alle  $y_F^Q \in \Lambda_Q$ . Wäre nun  $\bar{p}_F = 0$ , so ergäbe sich ein Widerspruch zur Ungesättigtheit mindestens eines Verbrauchers im Punkte  $\bar{y}_F$ .

(b) Die Bedingung (b) stimmt mit der Aussage von (7-13) überein.

(c) Annahme T 2b und (7-12) ergeben die Gültigkeit der Ungleichung

$$(7-15) \quad \bar{p}_F (f^\lambda(x^\lambda) - f^\lambda(\bar{x}^\lambda)) + \bar{p}_P (g^\lambda(x^\lambda) - g^\lambda(\bar{x}^\lambda)) \leq 0$$

für alle  $x^\lambda \in \Gamma_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, L$ , was der Bedingung (c) entspricht.

(d) Der Nachweis der Bedingung (d) setzt die Spezifikation einer passenden Einkommensverteilung in der Volkswirtschaft voraus. Bei institutionell gegebenen Konstanten  $\alpha_{\lambda Q} \geq 0$  würde der q-te Verbraucher zu Preisen  $\bar{p}$  das Einkommen

$$(7-16) \quad \bar{p}_P z_P^Q + \sum_\lambda \alpha_{\lambda Q} (\bar{p}_F f^\lambda(\bar{x}^\lambda) + \bar{p}_P g^\lambda(\bar{x}^\lambda))$$

beziehen. Dieses Einkommen muß nicht ausreichen, um dem Verbraucher den Erwerb des Warenkorbs  $\bar{y}_F^Q$  zu Preisen  $\bar{p}_F$  zu ermöglichen. Andererseits kann der Betrag  $\bar{p}_F \bar{y}_F^Q$  erheblich unter dem Einkommen liegen, so daß der Verbraucher bei Nichtsättigung bessere Warenkörbe als  $\bar{y}_F^Q$  erstehen könnte. Die Einkommensverteilung muß daher durch Transferzahlungen korrigiert

werden.<sup>122</sup> Der Betrag, den der q-te Verbraucher von den übrigen Verbrauchern oder einer Gruppe derselben erhält (Subvention) bzw. den er an sie zu zahlen hat (Steuer), wird mit  $t_q$  bezeichnet. Wir setzen

$$(7-17) \quad t_q = \bar{p}_F \bar{y}_F^q - \bar{p}_F z_F^q - \sum_{\lambda} u_{\lambda q} (\bar{p}_F f^{\lambda}(\bar{x}^{\lambda}) + \bar{p}_P g^{\lambda}(\bar{x}^{\lambda}))$$

und modifizieren die Definition des Einkommens des q-ten Verbrauchers in (7-5) durch Addition von  $t_q$  zum ursprünglichen Einkommen. Wegen (7-13) ist die Summe  $\sum_q t_q$  aller Transferzahlungen in der Volkswirtschaft gleich Null. Nach der Modifikation der Menge  $\hat{\Lambda}_q$  durch Addition von  $t_q$  auf der Einkommensseite der Budgetrestriktion gilt für jedes  $y_F^q \in \hat{\Lambda}_q$  die Ungleichung  $\bar{p}_F y_F^q \leq \bar{p}_F \bar{y}_F^q$  bzw.  $\bar{p}_F (y_F^q - \bar{y}_F^q) \leq 0$ . Aus P 3b und (7-11) folgt daher für alle  $y_F^q \in \hat{\Lambda}_q \subseteq \Lambda_q$  die Ungleichung

$$(7-18) \quad v_q^0 (u_q(y_F^q) - u_q(\bar{y}_F^q)) \leq 0, \quad q = 1, 2, \dots, R,$$

woraus wegen  $v_q^0 > 0$  die Bedingung (d) folgt, q.e.d.

Ersichtlich gilt der Satz 7.2 auch in folgender Fassung, die keine Differenzierbarkeitseigenschaften voraussetzt:

Satz 7.2\*: Das Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  aus Z sei ein Pareto-Optimum. Ist im Punkte  $\bar{y}_F$  mindestens ein Verbraucher ungesättigt, so existiert bei Gültigkeit der Annahmen T 1a-b, T 2a-b, F 1a-b, F 2, P 3a-b und der Voraussetzung, daß es Vektoren  $(\sigma_x, \sigma_{y_F})$  und  $(\sigma_x, \sigma_{y_F}) \in Z$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, R$ ) der in Lemma 7.2 genannten Art gibt, ein solches Preissystem  $\bar{p}$ , daß das Vektortripel  $(\bar{x}, \bar{y}_F, \bar{p})$  bei passender Einkommensverteilung in der Volkswirtschaft ein Gleichgewicht bei Wettbewerb darstellt.

Der Beweis ergibt sich durch unmittelbare Anwendung des Satzes 7.2 (vgl. 3.108).

7.2.4 Über die Existenz von pareto-optimalen Punkten im allgemeinen Gleichgewichtsmodell gilt der

Satz 7.3: Gibt es ein zulässiges Vektorpaar  $(\bar{x}, \bar{y}_F) \in Z$ , so existiert bei Gültigkeit der Annahmen P 1 bis P 3 und T 1 bis T 5 ein pareto-optimaler Punkt  $(\bar{x}, \bar{y}_F)$  in  $Z$ .

Beweis.

Anwendung der in Lemma 6.3 und Satz 6.4 benutzten Beweisverfahren ergibt, daß die Menge  $X$  nichtleer und kompakt ist. Dies impliziert zusammen mit den Annahmen P 1a, c, T 1a, c, T 2a, c, daß die Menge  $Z$  und damit auch die Menge  $Y_F$  kompakt ist. Wegen  $\bar{y}_F \in Y_F$  ist die Menge  $Y_F$  zudem nichtleer. Nach den Annahmen P 2 und P 3 existiert auf  $Y_F$  eine stetige vektorwertige Nutzenfunktion  $u = u(y_F)$ . Es folgt, daß die Menge der Bildpunkte  $u(Y_F)$  nichtleer und kompakt ist. Für beliebiges  $v^0 > 0$  existiert mithin das Maximum der Linearform  $L(u) = v^0 u$  auf  $u(Y_F)$ , etwa  $v^0 \bar{u} = \max v^0 u$ . Dann ist  $\bar{u} = u(\bar{y}_F)$  mit  $\bar{y}_F \in Y_F$  ein Vektormaximum von  $u$ , q.e.d.

Die Frage nach der Existenz von Punkten des Gleichgewichts bei Wettbewerb ohne Umverteilung des Einkommens der Wirtschaftssubjekte kann in dieser Arbeit nicht beantwortet werden. Zu ihrer Lösung sind neben verschärften Regularitätsannahmen schwierigere mathematische Hilfsmittel - sogenannte Fixpunktsätze - heranzuziehen.<sup>123/</sup>

Literaturverzeichnis

- [1] Allen, R.G.D.: Mathematical Economics, London (Macmillan), 1957.
- [2] Apostol, Tom M.: Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus, Reading/Mass. (Addison-Wesley), 1957.
- [3] Arrow, Kenneth J.: Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case, Chapter IX aus: Activity Analysis of Production and Allocation, edit. by T.C. Koopmans, New York (Wiley)/London (Chapman & Hall), 1951.
- [4] Arrow, Kenneth J./ Debreu, Gerard: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica Vol. 22, 1954, pp. 265-290.
- [5] Arrow, Kenneth J. / Enthoven, Alain C.: Quasi-Concave Programming, Econometrica Vol. 29, 1961, pp. 779 - 800.
- [6] Arrow, Kenneth J. / Hurwicz, Leonid: Reduction of Constrained Maxima to Saddle-Point Problems, aus: Proc. Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, edit. by Jerzy Neyman, Vol. V, pp. 1 - 20, Berkeley / Los Angeles (Univ. of California Press), 1956.
- [7] Arrow, Kenneth J. / Hurwicz, Leonid: Gradient Method for Concave Programming, III, Chapter 8 aus: Studies in Linear and Non-Linear Programming, edit. by K.J. Arrow / L. Hurwicz / H. Uzawa, Stanford/Calif. (Stanford Univ. Press), 1958.
- [8] Arrow, Kenneth J. / Hurwicz, Leonid: Decentralization and Computation in Resource Allocation, pp. 34 - 104 in: Essays in Economics and Econometrics, edit. by R.W. Pfouts, Chapel Hill (Univ. of North Carolina Press), o.J. (1960).
- [9] Arrow, Kenneth J. / Hurwicz, Leonid / Uzawa, Hirofumi: Constraint Qualifications in Maximization Problems, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 8, 1961, pp. 175 - 191.
- [10] Baumol, William J.: Activity Analysis in One Lesson, The American Economic Review, Vol. XLVIII, Dec. 1958, pp. 837 - 873.
- [11] Beckmann, Martin J.: Grundbegriffe der Produktionstheorie vom Standpunkt der Aktivitätsanalyse, weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 75, II, 1955, S. 33 - 58.

- [12] Charnes, A.: Optimality and Degeneracy in Linear Programming, *Econometrica* Vol. 20, 1952, pp. 160-170.
- [13] Charnes, A. / Cooper, W.W.: Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, volume I, New York / London (Wiley), 1961.
- [14] Debreu, Gerard: Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: Decision Processes, edit. by R.M. Thrall / C.H. Coombs / R.L. Davis, New York / London (Wiley), 1954, pp. 159-165.
- [15] Debreu, Gerard: Valuation Equilibrium and Pareto Optimum, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 40, 1954, pp. 588-592.
- [16] Debreu, Gerard: Theory of Value, Cowles Foundation Monograph No. 17, New York (Wiley) / London (Chapman & Hall), 1959.
- [17] Dennis, Jack B.: Mathematical Programming and Electrical Networks, New York (Wiley / M.I.T. Press), 1959.
- [18] Dorfman, Robert / Samuelson, Paul A. / Solow, Robert M.: Linear Programming and Economic Analysis, New York / Toronto / London (McGraw-Hill), 1958.
- [19] Dorn, W.S.: Duality and Shadow Prices in Non-Linear Programming, IBM RC-192, IBM Research Center, Yorktown Heights, N.Y., 1959.
- [20] Dorn, W.S.: Duality in Quadratic Programming, *Quart. Appl. Math.* Vol. 18, 1960, pp. 155-162.
- [21] Dorn, W.S.: A Duality Theorem for Convex Programs, *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 4, 1960, pp. 407-413.
- [22] Dorn, W.S.: Non-Linear Programming - A Survey, IBM RC-707, IBM Research Center, Yorktown Heights, N.Y., 1962.
- [23] Fenchel, W.: Convex Cones, Sets and Functions, ONR Logistics Research Project Report, Princeton (Princeton Univ. Departm. of Math.), 1953.
- [24] Fenchel, W.: On Conjugate Convex Functions, *Canadian Journal of Math.*, Vol. I, 1949, p. 73-77.
- [25] Finetti, Bruno de: Sulle stratificazioni convesse, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, ser. IV, vol. 30, 1949, pp. 173-181.
- [26] Gale, David: The Closed Linear Model of Production, in: Linear Inequalities and Related Systems, edit. by H.W. Kuhn / A.W. Tucker, Princeton (Princeton Univ. Press), 1956, pp. 285-303.
- [27] Gale, David: The Theory of Linear Economic Models, New York / Toronto / London (McGraw-Hill), 1960.

- [28] Gale, David / Kuhn, Harold W. / Tucker, Albert W.:  
Linear Programming and the Theory of Games,  
Chapter XIX aus: Activity Analysis of Production  
and Allocation, edit. by T.C. Koopmans, New York  
(Wiley) / London (Chapman & Hall), 1951.
- [29] Gass, Saul / Saaty, Thomas: The Computational Algorithm  
for the Parametric Objective Function, Naval Re-  
search Logistics Quarterly, Vol. 2, 1955, pp. 39 -  
45.
- [30] Hadley, G.: Linear Programming, Reading, Mass. (Addi-  
son-Wesley), 1962.
- [31] Hanson, M.A.: A Duality Theorem in Non-Linear Program-  
ming with Non-Linear Constraints, Australian  
Journ. of Statistics, Vol. 3, 1961, pp. 64 - 72.
- [32] Haupt, Otto / Aumann, Georg / Pauc, Christian Y.:  
Differential- und Integralrechnung, II. Bd.: Dif-  
ferentialrechnung, 2. Aufl. Berlin (de Gruyter),  
1950.
- [33] Huard, P.: Dual Programs, IBM Journal of Research  
and Development, Vol. 6, 1962, pp. 137 - 139.
- [34] Hurwicz, Leonid: Programming in Linear Spaces,  
Chapter 4 aus: Studies in Linear and Non-Linear  
Programming, edit. by K.J. Arrow / L. Hurwicz / H.  
Uzawa, Stanford, Calif. (Stanford Univ. Press),  
1958.
- [35] Jösch, H.C.: Lineares Programmieren,  
Tübingen (J.C.B. Mohr (Paul Siebeck)), 1962.
- [36] Karlin, Samuel: Mathematical Methods and Theory in  
Games, Programming, and Economics, Volume I:  
Matrix Games, Programming, and Mathematical Econo-  
mics, Reading, Mass. (Addison-Wesley), 1959.
- [37] König, Dénes: Theorie der endlichen und unendlichen  
Graphen, Mathematik in Monographien und Lehr-  
büchern XVI, Leipzig (Akad. Verlagsges.), 1936.
- [38] Koopmans, Tjalling C.: Analysis of Production as an  
Efficient Combination of Activities, Chapter III  
aus: Activity Analysis of Production and Alloca-  
tion, edit. by T.C. Koopmans, New York (Wiley) /  
London (Chapman & Hall), 1951.
- [39] Koopmans, Tjalling C.: Alternative Proof of the Sub-  
stitution Theorem for Leontief Models in the Case  
of Three Industries, Chapter VIII aus: Activity  
Analysis of Production and Allocation, edit. by  
T. C. Koopmans, New York (Wiley) / London (Chapman  
& Hall), 1951.
- [40] Koopmans, Tjalling C.: Efficient Allocation of Resour-  
ces, Econometrica Vol. 19, 1951, pp. 455 - 465.
- [41] Koopmans, Tjalling C.: Allocation of Resources and the

- Price System, Part I aus: Three Essays on the State of Economic Science, New York / Toronto / London (McGraw-Hill), 1957.
- [42] Künzi, Hans Paul / Krelle, Wilhelm: Nichtlineare Programmierung, Monographien zur Unternehmensforschung, Bd. I, Berlin / Göttingen / Heidelberg (Springer), 1962.
- [43] Kuhn, H.W. / Tucker, A.W.: Nonlinear Programming, in: Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, edit. by J. Neyman, Berkeley / Los Angeles (Univ. of Calif. Press), 1951, pp. 481 - 492.
- [44] Makower, Helen: Activity Analysis and the Theory of Economic Equilibrium, London (Macmillan), 1957.
- [45] McKenzie, Lionel: An Elementary Analysis of the Leontief System, Econometrica Vol. 25, 1957, pp. 456 - 462.
- [46] Samuelson, Paul A.: Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models, Chapter VII aus: Activity Analysis of Production and Allocation, edit. by T.C. Koopmans, New York (Wiley) / London (Chapman & Hall), 1951.
- [47] Slater, M.: Lagrange Multipliers Revisited: A Contribution to Non-Linear Programming, Cowles Comm. Discussion Paper, Math. 403, 1950.
- [48] Stigler, George J.: The Theory of Price, revised edit. New York (Macmillan), 1952.
- [49] Tucker, A.W.: Dual Systems of Homogeneous Linear Relations, Paper 1 aus: Linear Inequalities and Related Systems, edit. by H.W. Kuhn / A.W. Tucker, Princeton (Princeton Univ. Press), 1956.
- [50] Uzawa, Hirofumi: The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming, Chapter 3 aus: Studies in Linear and Non-Linear Programming, edit. by K.J. Arrow / L. Hurwicz / H. Uzawa, Stanford, Calif. (Stanford Univ. Press), 1958.
- [51] Uzawa, Hirofumi: Market Mechanisms and Mathematical Programming, Econometrica Vol. 28, 1960, pp. 872 - 881.
- [52] Wetzlar, W.: Theoretische Grundlagen des linearen Programmierens, der Einsatz-Ausstoß-Analyse und der Spieltheorie, in: Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme, Einzelschriften der Deut. Stat. Ges. Nr. 9, Würzburg (Physica), 1959, pp. 129 - 183.
- [53] Weyl, H.: Elementare Theorie der konvexen Polyeder, Comment. Math. Helv., Bd. 7, 1935, S. 390 - 405.

- [54] Whinston, Andrew: Conjugate Functions and Duality Theorems in Non-Linear Programming, Report 6305, ICMS No. 25, Internat. Center for Management Sci., 1963
- [55] Wolfe, Philip: A Duality Theorem for Non-Linear Programming, Quart. Appl. Math., Vol. XIX, 1961, pp. 239 - 244.
- [56] Woodbury, Max A.: Properties of Leontief-Type Input-Output Matrices, in: Economic Activity Analysis, edit. by O. Morgenstern, New York (Wiley) / London (Chapman & Hall), 1954, pp. 341 - 363.
- [57] Woodbury, Max A.: Characteristic Roots of Input-Output Matrices, in: Economic Activity Analysis, edit. by O. Morgenstern, New York (Wiley) / London (Chapman & Hall), 1954, pp. 365 - 382.

Anmerkungen  
=====

- 1/ Zur Einführung in die Aktivitätsanalyse vgl. z.B.: Koopmans [40], Efficient Allocation etc.; ders. [38], Analysis of Production etc., Introduction, pp. 33-42; Koopmans [41], Allocation of Resources etc., pt. 3, pp. 66 ff.; Allen [1], Mathematical Economics, chapter 17, Programming of Activities etc.; Beckmann [11], Grundbegriffe etc.; Baumol [10], Activity Analysis etc.; Makower [44], Activity Analysis etc.
- Die eckigen Klammern hinter den Autorennamen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis - vgl. S. 168-172 dieser Arbeit -, dem auch der vollständige Wortlaut der im Text zumeist abgekürzt zitierten Titel zu entnehmen ist.
- 2/ An dieser Stelle konnten nur die wichtigsten Bestandteile des Produktionsmodells der Aktivitätsanalyse in knapper Form erwähnt werden. Wegen ausführlicher Darstellungen, die namentlich die große Allgemeinheit dieses Modells verdeutlichen, wird auf Arbeiten von Koopmans [38], Analysis etc., § 1, pp. 33-42; [41], Allocation of Resources etc., §§ 3.1-3.6, pp. 66-83, und von Beckmann [11], Grundbegriffe etc., verwiesen.
- 3/ Koopmans [38], Analysis etc., §§ 3.3 passim, pp. 47-55.
- 4/ Koopmans [38], Analysis etc., p. 49.
- 5/ Folgt aus der Gültigkeit einer Aussage  $\alpha$  die Gültigkeit einer Aussage  $\beta$ , so sagen wir,  $\beta$  sei notwendig für  $\alpha$  und  $\alpha$  sei hinreichend (hinlänglich) für  $\beta$ . Folgt zugleich aus der Gültigkeit von  $\beta$  die Gültigkeit von  $\alpha$ , so ist  $\alpha(\beta)$  notwendig und hinreichend für  $\beta$  ( $\alpha$ ). Wir sagen in diesem Fall auch, daß  $\beta$  dann und nur dann (genau dann) gilt, wenn  $\alpha$  gilt.
- 6/ Tucker [49], Dual Systems, Corollary p. 7.
- 7/ Gale [27], Linear Models, Theorem 2.6, p. 44.
- 8/ Das Lemma findet sich bei Karlin [36], Math. Meth. I, Lemma 5.3.1, pp. 119-121, in einer etwas allgemeineren geometrischen Fassung. Der dort gegebene mengentheoretische Beweis greift auf die "geometrische" Dualitätstheorie der konvexen Kegel zurück.
- 9/ Gale [27], Linear Models, chapter II, § 3, pp. 42-49.
- 10/ Slater [47], Lagrange Multipliers. Vgl. Hurwicz [34], Programming etc., p. 44.
- 11/ Koopmans [38], Analysis etc., section 4, pp. 59-78.

- 12/ Die Theorie der polyedrischen konvexen Kegel gestattet gegenüber der in 1.5.2 entwickelten Theorie der allgemeinen konvexen Kegel gewisse Verschärfungen, die z.B. im Lemma 1.3 zum Ausdruck kommen. Diese Verschärfungen lassen sich mit geometrisch-mengentheoretischen Methoden teilweise nur unter Verwendung eines umfangreichen Rüstzeugs gewinnen, während sie in rein algebraischer Formulierung leichter zugänglich sind.
- 13/ Koopmans [38], Analysis etc., Theorem 4.13, p. 76.
- 14/ Vgl. z.B. Apostol [2], Analysis, theorem 4-20, p. 73.
- 15/ Karlin [36], Math. Meth. I, Appendix B.1 und B.3, pp. 397 ff., 402 ff.
- 16/ Vgl. z.B. Apostol [2], Analysis, theorem 3-29, theorem 4-4, p. 49 bzw. p. 64.
- 17/ Vgl. Karlin [36], Math. Meth. I, theorem 9.10.2, p. 339.
- 18/ Vgl. Karlin [36], Math. Meth. I, § 9.10, pp. 338-343.
- 19/ Vgl. Gale [26], Closed Model, pp. 285 ff.
- 20/ Vgl. Karlin [36], Math. Meth. I, theorem 9.10.4, p. 342.
- 21/ Karlin [36], Math. Meth. I, § 5.6, Theorem 5.6.1, pp. 126-128.
- 22/ Der Beweis stammt im wesentlichen von Gale / Kuhn / Tucker [28], Theorem 4, pp. 323-324.
- 23/ Koopmans [41], Allocation etc., p. 98.
- 24/ Die Aussage des Lemmas bildet im wesentlichen den Inhalt eines Theorems von Weyl über polyedrische konvexe Kegel. Vgl. Weyl [53], Elementare Theorie, Satz 2.
- 25/ Das Lemma besitzt Bedeutung für die Theorie der linearen Programmierung. Wegen des Beweisverfahrens vgl. z.B. Wetzell [52], Theoret. Grundlagen, § 2, S. 134-137, Gale [27], Linear Models, Theorem 2.11, pp. 50-51.
- 26/ Vgl. z.B. Gale [27], Linear Models, chapter 9, §§ 1-3, pp. 294 ff.; McKenzie [45], Elementary Analysis; Woodbury [56], Properties etc.; ders. [57], Characteristic Roots etc.
- 27/ Koopmans [38], Analysis etc., section 5, pp. 79-97.
- 28/ Charnes / Cooper [13], Management Models I, chapter IX, pp. 288-325.

- 29/ Koopmans [38], Analysis etc., § 5.11, pp. 91-93.
- 30/ Vgl. hierzu Koopmans [38], Analysis etc., § 5.11 und § 5.12, pp. 91-95.
- 31/ Vgl. Samuelson [46], Theorem Concerning Substitutability; Koopmans [39], Alternative Proof etc.; Arrow [3], Alternative Proof.
- 32/ Der Gedanke, den Beweis auf die Dualitätstheorie der linearen Programmierung zu stützen, wurde von Gale [27], § 9.3, einer Anregung von Dantzig folgend, aufgegriffen.
- 33/ Die letztgenannte Methode, deren Rechtfertigung im Lemma 2.3 zu suchen ist, bildet ein theoretisch sehr elementares Verfahren zur Lösung eines in kanonischer Form vorliegenden linearen Programmierungsproblems, die Linearform  $L(x) = c \cdot x$  bezüglich der Restriktionen  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$  zu maximieren. Praktisch verwertbar ist diese Methode allerdings nur in einfachen Fällen.
- 34/ Vgl. hierzu 5.1.7. Eine Funktion  $h(z)$  heißt linear homogen, wenn  $h(\lambda z) = \lambda h(z)$  gilt, sofern  $z$  und  $\lambda z$  dem Definitionsbereich von  $h$  angehören.
- 35/ Vgl. Arrow [3], Alternative Proof, Lemma 1, p. 158.
- 36/ Vgl. z.B. Apostol [2], Mathem. Analysis, theorem 4-20, p. 73.
- 37/ Der grundlegende Beweisgedanke stammt von Arrow [3], Alternative Proof, Lemma 8, pp. 160-161. Andere Beweise, die die Menge der effizienten Punkte des allgemeinen Modells explizit konstruieren, stammen von McKenzie [45] und Karlin [36], theorem 8.5.1. Auf die gewöhnlich vorgenommene Normierung der Elementarprozesse ( $a_p = -1$ ) und der verfügbaren Faktormenge ( $z_p^0 = 1$ ) wird hier verzichtet. Dies erlaubt den ausdrücklichen Hinweis, daß die Auswahl von  $A$  aus  $S$  unabhängig von  $z_p^0$  ist.
- 38/ Vgl. Gass / Saaty [29], Computational Algorithm.
- 39/ Vgl. Charnes / Cooper [13], Management Models I, chapter IX, §§ 6-7, pp. 302-310.
- 40/ Um die Theorie von Abschnitt 2.2 anwenden zu können, schreibt man die Restriktionen  $Ax = b$  in der gleichwertigen Form  $Ax \leq b$  und  $-Ax \leq -b$ .
- 41/ Die Simplex-Methode wird im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt; ihre Rechenschritte sind in den Beweisen des Abschnitts 4.1.4 enthalten. Wegen der Einzelheiten wird auf Gale [27], Hadley [35], und Karlin [36] verwiesen.

Hier wird die Theorie der Simplex-Methode nur wiederholt, soweit sie zum Verständnis der Spiralmethode erforderlich ist. Der Beweis von Lemma 4.2 kann z.B. bei Charnes / Cooper [13], Management Models I, theorem 8, p. 245, der des Lemmas 4.3 z.B. bei Gale [27], Linear Models, p. 84, nachgelesen werden.

- 42/ Degenerierte Mengen  $X$  können nach einer Methode von Charnes durch Variation von  $b$  in beliebiger Genauigkeit durch nichtdegenerierte Mengen  $X'$  approximiert werden. Vgl. Charnes [12], Optimality and Degeneracy etc.
43. Zum Begriff des Graphen vgl. König [37], Theorie der Graphen, oder Hadley [30], Linear programming, pp. 331 - 333.
44. Zum Satz 4.4 und seinem Beweis vgl. auch Charnes / Cooper [13], Management Models I, pp. 306 - 307.
45. Ein Mengensystem  $\Sigma$  wird eine abgeschlossene Überdeckung der Menge  $M$  genannt, wenn jeder Punkt von  $M$  in mindestens einer der Mengen von  $\Sigma$  enthalten ist und alle Mengen von  $\Sigma$  abgeschlossen sind.
46. Charnes / Cooper [13], Management Models I, pp. 308 - 310.
47. König [37], Theorie der Graphen, Kap. III, § 3, S. 41 - 43.
48. Vgl. Charnes / Cooper [13], Management Models I, pp. 308 - 310.
49. Man wendet die Regeln (4-21) bis (4-23) auf dasjenige  $j^*$  an, für welches sich in der Zeile  $c_B^T - c$  der kleinste Wert ergibt. Das Leitelement  $t_{i^*}^{j^*}$  ist in den Tableaus jeweils umrandet worden. Solange noch kein Optimum-Tableau vorliegt, ist es das Ziel der Simplex-Methode, die den Schlupfvariablen zugehörigen Spaltenvektoren von  $A$  aus der Basis  $A_B$  zu eliminieren.
50. Die folgenden Optimum-Tableaus sind verkürzt, indem die Teilmatrix  $T_B$ , welche der Einheitsmatrix oder einer ihrer Permutationsmatrizen entspricht, fortgelassen ist.
51. Vgl. auch die von Joks [35], Lineares Programmieren, S. 108 - 112, beschriebene Methode der parametrischen Linearprogrammierung mit zwei Parametern in der Zielfunktion, die der zweidimensionalen geometrischen Illustration in Abb. 2 entspricht.
52. Der Unterscheidung zwischen expliziten Restriktionen  $g(x) \geq C$  und impliziten Restriktionen  $x \in \Gamma$  entspricht wirtschaftstheoretisch die Unterscheidung von modell-internen und von -externen Produktions- und Konsumbe-

schränkungen. Die Trennung von  $\Gamma$  und  $\Omega$  empfiehlt sich für spätere Ausführungen.

53/ Vgl. auch die Darstellung von Künzi / Krelle [42], Nicht-lineare Programmierung, S. 72 - 73.

54/ Karlin [36], Math. Meth. I, Appendix B.4, pp. 404 - 406.

55/ Gewöhnlich wird bei der Differenzierbarkeit vorausgesetzt, daß die Definitionsmenge von  $h(x)$  eine offene Menge in  $E_n$  sei (vgl. z.B. Apostol [2], Analysis, §§ 6.4 - 6.8, pp. 107 - 117). Diese Annahme ist für die vorliegende Theorie zu restriktiv. Wird im folgenden Differenzierbarkeit einer Funktion in einer Menge  $\Lambda \subseteq E_n$  gefordert, so ist unter  $\Lambda$  stets ohne besondere Erwähnung eine achsenparallel lokalkonvexe Menge der Dimension n zu verstehen, d.h. eine Menge mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt  $x \in \Lambda$  gibt es eine (kugelförmige) Umgebung  $U(x, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , so daß der Durchschnitt  $\Lambda \cap U(x, \delta)$  konvex ist und für jeden Einheitsvektor  $e^i \in E_n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) einen Punkt  $x^i = x + \lambda_1 e^i$  mit  $\lambda_1 \neq 0$  enthält. Beispiele für derartige lokalkonvexe Mengen der Dimension n sind die offenen Mengen von  $E_n$ , aber auch abgeschlossene Mengen  $E_n^+$  und nichtdegenerierte n-dimensionale Intervalle.

Die reelle Funktion  $\varphi = \varphi(x)$  sei in einer (achsenparallel lokalkonvexen) Menge  $\Lambda$  (der Dimension n) definiert. Wir sagen,  $\varphi(x)$  besitze im Punkt  $x \in \Lambda$  ein Differential oder sei in diesem Punkte differenzierbar, wenn eine Funktion  $d\varphi = d\varphi(x; dx)$  existiert, die für den Punkt  $x \in \Lambda$  und für alle Vektoren  $dx \in E_n$  definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

- (1)  $d\varphi(x; \alpha dx + \beta dx') = \alpha d\varphi(x; dx) + \beta d\varphi(x; dx')$   
für beliebige skalare Größen  $\alpha, \beta$  und beliebige Vektoren  $dx, dx' \in E_n$ ;
- (2) zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine Umgebung  $U(x, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , von  $x$ , so daß für jeden Punkt  $x' \in \Lambda \cap U(x, \delta) - x$  die Ungleichung

$$|\varphi(x') - \varphi(x) - d\varphi(x; x' - x)| < \varepsilon |x' - x|$$

gilt.

Vgl. Apostol [2], p. 107. Für im soeben erklärten Sinne differenzierbare Funktionen gelten die bekannten Lehrsätze der Differentialrechnung, wobei in Randpunkten von  $\Lambda$  einseitige partielle Ableitungen und Richtungsderivierte zuzulassen sind. Vgl. hierzu Haupt / Aumann / Pauc [32], Differentialrechnung, §§ 3.1.2 - 3.1.3, 3.2.3, S. 135 ff.

Eine vektorielle Funktion  $h(x)$  heißt differenzierbar, wenn jede ihrer reellen Komponenten differenzierbar ist.

- 56/ Aus Gründen einheitlicher Schreibweise wird eine Restriktion  $g_k(x) = 0$  äquivalent  $g_k(x) \geq 0$  und  $-g_k(x) \geq 0$  geschrieben. Der einer in Gleichungsform gegebenen Restriktion zugeordnete Multiplikator  $u_k$  ist als Differenz zweier nichtnegativer Multiplikatoren nicht vorgezeichenbeschränkt.
- 57/ Uzawa [50], Kuhn-Tucker Theorem, pp. 35 - 37.
- 58/ Slater [47], Lagrange Multipliers.
- 59/ Uzawa [50], Kuhn-Tucker Theorem. Uzawa betrachtet allerdings nur skalare Zielfunktionen  $f(x)$ , d.h.  $r = 1$ , mit  $\Gamma = \Omega = E_n^+$ .
- 60 Vgl. z.B. Künzi / Krelle [42], Nichtlineare Programmierung, S. 61, nach Gl. (3-11).
- 61 Kuhn / Tucker [43], Nonlinear Programming, pp. 482 - 483.
- 62 Kuhn / Tucker [43], Nonlinear Programming.
- 63 Uzawa [50], Kuhn-Tucker Theorem.
- 64 Slater [47], Lagrange Multipliers.
- 65 Arrow / Hurwicz [6], Reduction of Constrained Maxima.
- 66 Kuhn / Tucker [43], Nonlinear Programming, p. 482.
- 67 Karlin [36], Math. Meth. I, § 7.1, p. 200.
- 68 Die konvexe Hülle einer Menge  $M$  ist als Durchschnittsmenge aller konvexen Mengen, die  $M$  enthalten, definiert. Die konvexe Hülle von  $X$  und  $R_x$  ist eine Teilmenge von  $\Omega$ , da  $\Omega$  als konvex vorausgesetzt wird.
- 69 Vgl. Arrow / Hurwicz / Uzawa [9], Constraint Qualifications, p. 177.
- 70 Kuhn / Tucker [43], Nonlinear Programming, Beispiel pp. 483 - 484.
- 71 Kuhn / Tucker [43], aa0, "Constraint Qualification", p. 483.
- 72 Arrow / Hurwicz / Uzawa [9], aa0, Corollary 3, p. 183, Corollary 4, p. 184.
- 73 Arrow / Hurwicz [6], Reduction of Constrained Maxima, p. 8. Wegen des Beweises des Kriteriums wird auf Appendix I, l.c., pp. 17 - 18, verwiesen. (Man beachte, daß die dortige Symbolik von der hier verwendeten abweicht.)

- 74/ Kuhn / Tucker [43], aa0, p. 488. Bei skalaren Zielfunktionen  $f(x)$  ( $r = 1$ ) sind alle Lösungen des Problems I eigentliche Lösungen.
- 75/ Kuhn / Tucker [43], aa0, p. 488.
- 76/ Vgl. zum Beweis Kuhn / Tucker [43], aa0, Theorem 4, pp. 488 - 489.
- 77/ Die Aufspaltung (5-60) ist nicht zu verwechseln mit der in 5.2.2 vor Lemma 5.5 eingeführten Zerlegung von  $g$ .
- 78/ Huard [33], Dual Programs, p. 138.
- 79/ Vgl. den Literaturbericht in 5.3.10.
- 80/ Dennis [17], Mathematical Programming.
- 81/ Dorn [21], Duality Convex Programs, ders. [20], Duality Quadratic Programming. Dorn behandelt die im zweiten Teil von 5.1.4 angegebenen Spezialfälle für  $r = 1$ .
- 82/ Wolfe [55], Duality Theorem.
- 83/ Hanson [31], Duality Theorem.
- 84/ Huard [33], Dual Programs.
- 85/ Huard [33], Dual Programs, pp. 138 - 139.
- 86/ Kuhn / Tucker [43], Nonlinear Programming, § 6, pp. 487 - 489.
- 87/ Fenchel [24], Conjugate Convex Functions, ders. [23], Convex Cones.
- 88/ Karlin [36], Math. Meth. I, §§ 7.5 - 7.8, pp. 218 - 229.
- 89/ Whinston [54], Conjugate Functions.
- 90/ Die Zerlegung (6-13) ist in 3.1.3 erklärt worden.
- 91/ Vgl. zu dieser Interpretation des Sattelwertproblems die Darstellung von Arrow / Hurwicz, Decentralization, p. 57.
- 92/ Vgl. z.B. Apostol [2], Analysis, theorem 4-16, p. 71.
- 93/ Vgl. z.B. Apostol [2], aa0, theorem 4-20, p. 73.
- 94/ Diese Annahme liegt z.B. dem Modell von Karlin [36], Math. Meth. I, § 9.1, pp. 293 ff., zu Grunde. Vgl. hierzu die Annahme "The total production set ... is assumed to be ... compact", p. 294.

- 95/ Vgl. die übliche Begründung des Gesetzes vom abnehmenden Ertragszuwachs in der Lehrbuchliteratur, z.B. bei Stigler [48], Theory of Price, chapter VII, pp. 111ff.
- 96/ Ähnliche Beweisführungen sind in der modernen Katalaktik des öfteren anzutreffen. Vgl. z.B. Arrow / Debreu [4], §§ 3.3.1 - 3.3.2, pp. 276 - 277, und Debreu [16], Theory of Value, pp. 92 - 93.
- 97/ Vgl. z.B. Apostol [2], aaO, theorem 3-29, p. 49, theorem 4-4, p. 64.
- 98/ Zu den Bedingungen (6-21) und (6-22) und ihrer ökonomischen Interpretation vgl. die ausführliche Darstellung bei Dorfman / Samuelson / Solow [18], Linear Programming, chapter 8-2, 8-3, pp. 189 - 196.
- 99/ Koopmans [38], Analysis of Production, § 5.12, pp. 93 - 95.
- 100/ Arrow / Hurwicz [8], Decentralization etc.
- 101/ Vgl. das bei Arrow / Hurwicz [7], Gradient Methods III, p. 139, eingeführte Modell.
- 102/ Es wird die von Arrow / Hurwicz [8], aaO, gewählte Terminologie benutzt. Die Funktion des "helmsman" ist bei Koopmans [38], aaO, etwas anders definiert. Vgl. Arrow / Hurwicz [8], aaO, p. 76, p. 81.
- 103/ Unsere Darstellung beschränkt sich auf die statische Theorie der Aktivitätsanalyse. Für die Behandlung der dynamischen Probleme vgl. Arrow / Hurwicz [7], Gradient Methods III, dies. [8], Decentralization, und Uzawa [51], Market Mechanisms. In diesen Arbeiten wird gezeigt, daß unter verschärften Annahmen über die Technologie die beschriebenen Spielregeln zur Definition eines konvergenten dynamischen Anpassungsprozesses herangezogen werden können.
- 104/ Arrow / Hurwicz [8], Decentralization.
- 105/ Auf betriebswirtschaftlich-organisatorische Anwendungen des Prinzips der Dezentralisation - etwa bei der betrieblichen pretialen Lenkung - kann in dieser Arbeit nicht eingegangen werden.
- 106/ Vgl. Debreu [16], Theory of Value, § 1.4, pp. 7 - 9.
- 107/ Vgl. Debreu [14], Representation, [16] Theory of Value, § 4.6, pp. 56 - 59.
- 108/ Charnes / Cooper [13], Management Models I, p. 321.
- 109/ Arrow / Debreu [4], Existence of an Equilibrium etc.

- 110/ Arrow / Debreu [4], aa0, § 1.3.2, p. 270.
- 111/ Wir schreiben  $\hat{y}_F^Q >^*_Q \bar{y}_F^Q$ , wenn  $\hat{y}_F^Q \geq^*_Q \bar{y}_F^Q$  und  $\hat{y}_F^Q \neq^*_Q \bar{y}_F^Q$  ist (strikte Präferenz).
- 112/ Eine Funktion  $\varphi(z)$  heißt in einer konvexen Menge M quasi-konkav, wenn die Mengen  $M_\gamma = \{z \mid \varphi(z) \geq \gamma, z \in M\}$  für jedes  $\gamma$  konvex sind.
- 113/ Vgl. hierzu: de Finetti [25], Sulle stratificazioni convesse.
- 114/ Arrow / Enthoven [5], Quasi-concave Programming.
- 115/ Koopmans [41], Allocation etc., pp. 41 passim.
- 116/ Dorfman / Samuelson / Solow [18], Linear Programming etc., § 14-5, pp. 404 ff.
- 117/ Debreu [15], Valuation Equilibrium etc., theorem I, p. 589.
- 118/ Koopmans [41], aa0, Proposition 4, p. 49.
- 119/ Karlin [36], Math. Meth. I, § 9.1, theorem 9.1.3, p. 300.
- 120/ Vgl. Koopmans [41], aa0, Proposition 5, pp. 50-51.
- 121/ Vgl. den ähnlichen Beweis bei Karlin [36], Math. Meth. I, § 9.1, theorem 9.1.2, p. 298.
- 122/ Diese Korrektur braucht keineswegs im Sinne irgendeiner ethischen Norm "gerecht" zu sein; mit dem Begriff des Pareto-Optimums ist apriori keine ethische Wertung verknüpft. Es könnte sogar sein, daß die ursprüngliche Einkommensverteilung in (7-16) im Sinne irgendeiner Wertskala "gerechter" ist als die korrigierte, sofern es sich bei dem Pareto-Optimum  $\bar{y}_F$  um eine "unsoziale" Position handelt. Der Ausdruck "Pareto-Optimum" wird daher besser durch die neutrale Bezeichnung "Effizienz des Faktoreinsatzes" ersetzt.
- 123/ Vgl. Arrow / Debreu [4], Existence of an Equilibrium etc.



## Lebenslauf

Ich wurde am 13. Mai 1937 als Sohn des Bankkaufmannes Karl Schönfeld und seiner Ehefrau Margarete, geb. Prengel, in Berlin geboren. Nach vierjähriger Grundschule und neunjährigem Besuch eines neusprachlichen Gymnasiums in Berlin legte ich im Februar 1956 die Reifeprüfung ab. Im Frühjahr 1956 begann ich das Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Freien Universität Berlin, das ich im Juli 1961 mit der Diplomprüfung für Volkswirte abschloß.

Mein besonderes Interesse galt und gilt der mathematischen Wirtschaftstheorie und der Statistik. Meine hauptsächlichlichen akademischen Lehrer sind die Professoren H. Arndt, A. Dinghas, E. Hirsch, E. Kosiol, H. Münzner, A. Paulsen, R. Schilcher und K.C. Thalheim. Entscheidende Förderung und nachhaltige Anregungen verdanke ich Herrn Prof. Münzner, an dessen Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik ich seit 1959 als Hilfskraft beschäftigt war und seit Januar 1962 als Assistent tätig bin. Die Dissertation entstand unter seiner Leitung.

Karl Peter Schönfeld





